

1. Докажите существование прямой Обера через линейность.
2. Через ортоцентр H треугольника ABC провели перпендикулярные прямые, которые пересекли стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Точка R выбрана таким образом, что прямая RC параллельна HP , а RA параллельна HQ . Докажите, что точки P , Q и R лежат на одной прямой.
3. Из ортоцентра H треугольника ABC опущены перпендикуляры на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла B . Пусть P и Q — основания этих перпендикуляров. Докажите, что прямая PQ делит сторону AC пополам.
4. Докажите, что в остроугольном треугольнике можно найти точку, являющуюся центром трёх различных вписанных в треугольник прямоугольников.
5. Обозначим середину дуги ABC описанной окружности треугольника ABC через M . Точки P и Q выбраны на сторонах AB и BC треугольника таким образом, что $PA = QC$. Докажите, что точки B , M , P и Q лежат на одной окружности.
6. Докажите, что прямая, проходящая через основания внешних биссектрис, перпендикулярна линии центров вписанной и описанной окружностей треугольника.
7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . На дуге ABC описанной окружности треугольника ABC выбрана произвольная точка D . Прямые AD и CC_1 пересекаются в точке P , а прямые CD и AA_1 пересекаются в точке Q . Докажите, что прямая A_1C_1 делит отрезок PQ пополам.
8. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$ и произвольная точка X . Пусть X_{AB} , X_{BC} , X_{CD} , X_{DA} , X_{AC} , X_{BD} — проекции точки X на прямые AB , BC , CD , DA , AC и BD соответственно. Докажите, что середины отрезков $X_{AB}X_{CD}$, $X_{BC}X_{DA}$ и $X_{AC}X_{BD}$ лежат на одной прямой.

1. Докажите существование прямой Обера через линейность.
2. Через ортоцентр H треугольника ABC провели перпендикулярные прямые, которые пересекли стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Точка R выбрана таким образом, что прямая RC параллельна HP , а RA параллельна HQ . Докажите, что точки P , Q и R лежат на одной прямой.
3. Из ортоцентра H треугольника ABC опущены перпендикуляры на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла B . Пусть P и Q — основания этих перпендикуляров. Докажите, что прямая PQ делит сторону AC пополам.
4. Докажите, что в остроугольном треугольнике можно найти точку, являющуюся центром трёх различных вписанных в треугольник прямоугольников.
5. Обозначим середину дуги ABC описанной окружности треугольника ABC через M . Точки P и Q выбраны на сторонах AB и BC треугольника таким образом, что $PA = QC$. Докажите, что точки B , M , P и Q лежат на одной окружности.
6. Докажите, что прямая, проходящая через основания внешних биссектрис, перпендикулярна линии центров вписанной и описанной окружностей треугольника.
7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . На дуге ABC описанной окружности треугольника ABC выбрана произвольная точка D . Прямые AD и CC_1 пересекаются в точке P , а прямые CD и AA_1 пересекаются в точке Q . Докажите, что прямая A_1C_1 делит отрезок PQ пополам.
8. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$ и произвольная точка X . Пусть X_{AB} , X_{BC} , X_{CD} , X_{DA} , X_{AC} , X_{BD} — проекции точки X на прямые AB , BC , CD , DA , AC и BD соответственно. Докажите, что середины отрезков $X_{AB}X_{CD}$, $X_{BC}X_{DA}$ и $X_{AC}X_{BD}$ лежат на одной прямой.