10 класс Гамильтоновы графы 27 ноября 2017

Определение. *Гамильтоновым* путем (циклом) называется путь (цикл), который проходит по разу через каждую вершину графа.

1. а) Докажите, что в любом полном ориентированном графе существует гамильтонов путь.

б) Докажите, что в любом сильносвязном полном ориентированном графе существует гамильтонов цикл.

2. Докажите, что в полном ориентированном графе на $2k$ вершинах найдется гамильтонов путь, в котором проведено ребро из начала пути в конец.

3. а) В графе на n вершинах все вершины имеют степень не менее $\frac{n-1}{2}$. Докажите, что в нем есть гамильтонов путь.

б) В графе на n вершинах все вершины имеют степень не менее $\frac{n}{2}$. Докажите, что в нем есть гамильтонов цикл.

4. а) В графе на n вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше, чем $n-1$. Докажите, что в нем есть гамильтонов путь.

б) В графе на n вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше, чем n. Докажите, что в нем есть гамильтонов цикл.

5. Какое максимальное число рёбер может быть в графе на n вершинах, в котором нет гамильтонова пути?

6. В танцевальном кружке занимаются 27 мальчиков и 27 девочек. Известно, что каждому мальчику нравятся по крайней мере 14 девочек, причём каждая девочка нравится по крайней мере 14 мальчикам. Докажите, что их можно расставить по кругу таким образом, чтобы рядом с каждым мальчиком стояли две девочки, которые ему нравятся.

7. В графе все вершины имеют степень 3. Известно, что количество раскрасок ребер данного графа в три цвета таких, что в каждой вершине сходится три разноцветных ребра, сравнимо с 2 по модулю 4. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.

8. Дана доска 8×8. *Хромой ладьёй* назовём фигуру, которая ходит на одну клетку по вертикали или горизонтали. Хромая ладья стартовала в некоторой клетке, обошла всю доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернулась в исходную клетку. Докажите, что число горизонтальных ходов не равно числу вертикальных.

10 класс Гамильтоновы графы 27 ноября 2017

Определение. *Гамильтоновым* путем (циклом) называется путь (цикл), который проходит по разу через каждую вершину графа.

1. а) Докажите, что в любом полном ориентированном графе существует гамильтонов путь.

б) Докажите, что в любом сильносвязном полном ориентированном графе существует гамильтонов цикл.

2. Докажите, что в полном ориентированном графе на $2k$ вершинах найдется гамильтонов путь, в котором проведено ребро из начала пути в конец.

3. а) В графе на n вершинах все вершины имеют степень не менее $\frac{n-1}{2}$. Докажите, что в нем есть гамильтонов путь.

б) В графе на n вершинах все вершины имеют степень не менее $\frac{n}{2}$. Докажите, что в нем есть гамильтонов цикл.

4. а) В графе на n вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше, чем $n-1$. Докажите, что в нем есть гамильтонов путь.

б) В графе на n вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше, чем n. Докажите, что в нем есть гамильтонов цикл.

5. Какое максимальное число рёбер может быть в графе на n вершинах, в котором нет гамильтонова пути?

6. В танцевальном кружке занимаются 27 мальчиков и 27 девочек. Известно, что каждому мальчику нравятся по крайней мере 14 девочек, причём каждая девочка нравится по крайней мере 14 мальчикам. Докажите, что их можно расставить по кругу таким образом, чтобы рядом с каждым мальчиком стояли две девочки, которые ему нравятся.

7. В графе все вершины имеют степень 3. Известно, что количество раскрасок ребер данного графа в три цвета таких, что в каждой вершине сходится три разноцветных ребра, сравнимо с 2 по модулю 4. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.

8. Дана доска 8×8. *Хромой ладьёй* назовём фигуру, которая ходит на одну клетку по вертикали или горизонтали. Хромая ладья стартовала в некоторой клетке, обошла всю доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернулась в исходную клетку. Докажите, что число горизонтальных ходов не равно числу вертикальных.

ЯПУОВ.РФ