10 класс **Продолжаем считать** 16 октября 2017

1. На биссектрисе угла с вершиной A отмечена точка P. Через P проводится прямая, пересекающая стороны угла в точках B и C. Докажите, что величина $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$ не зависит от выбора прямой.

2. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC вторично пересекает его описанную окружность в точке A_0. Пусть B_1 и C_1 — середины AC и AB соответственно. Серединные перпендикуляры к AC и AB пересекают прямую AA_0 в точках B_2, C_2 соответственно. Докажите, что площади треугольников $A_0B_1B_2$ и $A_0C_1C_2$ равны.

3. Дан треугольник ABC. Точка B_1 внутри него такова, что $\angle B_1AC=\frac{\angle A}{3}$, $\angle B_1CA=\frac{\angle C}{3}$. Аналогично определяются точки A_1 и C_1.

а) Пусть $\angle A=3\alpha, \angle B=3\beta, \angle C=3\gamma$, R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $AB_1=8R\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ+\beta)$.

б) Теорема Морлея. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный.

4. Точка X лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что хотя бы один из углов $\angle XAB$, $\angle XBC$, $\angle XCA$ не превосходит 30°.

5. В остроугольном треугольнике ABC ($AB<BC$) точка O — центр описанной окружности, BH_b — высота. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO, пересекает прямую BO в точке X. Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике ABC точки I_a и I_c — центры вневписанных окружностей, H — основание высоты из вершины B. Прямая I_aH пересекает BC в точке A', а прямая I_cH пересекает AB в точке C'. Докажите, что $A'C'$ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

7. Прямая l, проходящая через ортоцентр H остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая, проходящая через H перпендикулярно l, пересекает сторону AB треугольника в точке F. Докажите, что $DH/HE=AF/FB$.

8. Точка K лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC. Оказалось, что радиус вписанной окружности треугольника ABK равен радиусу вневписанной окружности треугольника ACK, касающейся CK, и равен r. Докажите, что $r=h/4$, где h – высота, опущенная из B на AC.

10 класс **Продолжаем считать** 16 октября 2017

1. На биссектрисе угла с вершиной A отмечена точка P. Через P проводится прямая, пересекающая стороны угла в точках B и C. Докажите, что величина $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$ не зависит от выбора прямой.

2. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC вторично пересекает его описанную окружность в точке A_0. Пусть B_1 и C_1 — середины AC и AB соответственно. Серединные перпендикуляры к AC и AB пересекают прямую AA_0 в точках B_2, C_2 соответственно. Докажите, что площади треугольников $A_0B_1B_2$ и $A_0C_1C_2$ равны.

3. Дан треугольник ABC. Точка B_1 внутри него такова, что $\angle B_1AC=\frac{\angle A}{3}$, $\angle B_1CA=\frac{\angle C}{3}$. Аналогично определяются точки A_1 и C_1.

а) Пусть $\angle A=3\alpha, \angle B=3\beta, \angle C=3\gamma$, R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $AB_1=8R\sin\beta\sin\gamma\sin(60^\circ+\beta)$.

б) Теорема Морлея. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный.

4. Точка X лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что хотя бы один из углов $\angle XAB$, $\angle XBC$, $\angle XCA$ не превосходит 30°.

5. В остроугольном треугольнике ABC ($AB<BC$) точка O — центр описанной окружности, BH_b — высота. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO, пересекает прямую BO в точке X. Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике ABC точки I_a и I_c — центры вневписанных окружностей, H — основание высоты из вершины B. Прямая I_aH пересекает BC в точке A', а прямая I_cH пересекает AB в точке C'. Докажите, что $A'C'$ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

7. Прямая l, проходящая через ортоцентр H остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая, проходящая через H перпендикулярно l, пересекает сторону AB треугольника в точке F. Докажите, что $DH/HE=AF/FB$.

8. Точка K лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC. Оказалось, что радиус вписанной окружности треугольника ABK равен радиусу вневписанной окружности треугольника ACK, касающейся CK, и равен r. Докажите, что $r=h/4$, где h – высота, опущенная из B на AC.