Серия 16. Разнобой.

1. В колоде 2^n-1 карт. Ее тасуют следующим образом: верхние 2^{n-1} и нижние $2^{n-1}-1$ смешиваются через 1, сохраняя порядок (верхняя карта при этом остается на месте). Через сколько таких операций колода придет в первоначальное положение?

2. Доска $(2m+1)\times(2n+1)$ $(m,n\geqslant 1)$ раскрашена в белый и чёрный цвет. Назовём клетку доминируемой строкой (столбцом), если более половины клеток этой строки (столбца) такого же цвета. Найдите наименьшее количество клеток, доминируемых одновременно и строкой и столбцом.

3. На доске в некотором порядке написаны числа 1,2,3,...,2018. К каждому числу прибавили номер места, на котором оно стоит. Докажите, что получатся либо два равных числа, либо два числа, различающихся на 2018.

4. На окружности ω с центром в точке O и радиусом R выбраны точки A и B такие, что $R<AB<2R$. Окружность ω_1 с центром в точке A радиуса меньше R пересекает окружность ω в точках C и D, причем C лежит на меньшей дуге AB. Касательные, проведенные из точки B к окружности ω_1, касаются ее в точках E и F, причем E лежит вне окружности ω. Пусть M — пересечение прямых EC и DF. Докажите, что четырехугольник $BCFM$ вписанный.

5. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие условию

$$(x^2-6x+8)P(x)=(x^2+2x)P(x-2)$$

при любых действительных x.

6. Обозначим за $P_k(n)$ произведение всех делителей n, которые кратны k. Докажите, что $P_1(n)P_2(n)...P_n(n)$ — точный квадрат для всех натуральных n.

Ягубов.РФ