10 класс **Международный разнобой** 11 сентября 2017

1. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ строится следующим образом: a_0 — некоторое натуральное число; $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, если $\sqrt{a_n}$ — целое число; $a_{n+1} = a_n + 3$ иначе. При каких a_0 существует число A, встречающееся в этой последовательности бесконечно много раз?

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + 2\angle C = 180°$. В треугольнике ABD проведена биссектриса AE. Серединный перпендикуляр к отрезку AE пересекает лучи CB и CD в точках X и Y соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CYAX$ — вписанный.

3. В некотором графе между любыми двумя вершинами есть как путь чётной длины, так и путь длины не более 100. При каком наименьшем натуральном d между любыми двумя вершинами этого графа гарантированно есть путь чётной длины не более d? (Длина пути — это количество рёбер в нём; пути могут самопересекаться как по вершинам, так и по рёбрам.)

4. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, больших 1, для которых выполнено равенство $[a-1, b-1] + [a+1, b+1] = 2[a, b]$.

5. Пусть R и S — две точки на окружности ω такие, что RS не является диаметром. Пусть l — касательная к ω в точке R. Точка T такова, что S — середина отрезка RT. Точка J выбрана на меньшей дуге RS окружности ω так, что окружность Γ, описанная около треугольника JST, пересекает l в двух точках. Пусть A — та из них, которая ближе к R. Прямая AJ вторично пересекает ω в точке K. Докажите, что прямая KT касается Γ.

6. В строчку выписаны числа $\frac{1}{2002}, \frac{1}{2003}, \ldots, \frac{1}{2017}$. Лёша хочет поставить перед восемью из них знак "+", а перед восемью из них знак "—" так, чтобы модуль полученного выражения был минимален. Как ему быть?

7. Пусть $Q(t)$ — квадратный трёхчлен с двумя действительными корнями. Докажите, что существует приведённый многочлен $P(x)$, не являющийся константой, такой, что модули всех коэффициентов многочлена $Q(P(x))$, быть может кроме старшего, меньше чем 0,001.

8. Дано натуральное N. Натуральные числа от 1 до $N^2 + N$ выписаны в строчку в некотором порядке. Андрей Борисович хочет вычеркнуть $N^2 - N$ из них так, чтобы среди оставшихся $2N$ чисел ничего не стояло между двумя максимальными из них, между 3-м и 4-м по величине, … , между двумя минимальными из них. Обязательно ли у него это получится?

10 класс **Международный разнобой** 11 сентября 2017

1. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ строится следующим образом: a_0 — некоторое натуральное число; $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, если $\sqrt{a_n}$ — целое число; $a_{n+1} = a_n + 3$ иначе. При каких a_0 существует число A, встречающееся в этой последовательности бесконечно много раз?

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + 2\angle C = 180°$. В треугольнике ABD проведена биссектриса AE. Серединный перпендикуляр к отрезку AE пересекает лучи CB и CD в точках X и Y соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CYAX$ — вписанный.

3. В некотором графе между любыми двумя вершинами есть как путь чётной длины, так и путь длины не более 100. При каком наименьшем натуральном d между любыми двумя вершинами этого графа гарантированно есть путь чётной длины не более d? (Длина пути — это количество рёбер в нём; пути могут самопересекаться как по вершинам, так и по рёбрам.)

4. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, больших 1, для которых выполнено равенство $[a-1, b-1] + [a+1, b+1] = 2[a, b]$.

5. Пусть R и S — две точки на окружности ω такие, что RS не является диаметром. Пусть l — касательная к ω в точке R. Точка T такова, что S — середина отрезка RT. Точка J выбрана на меньшей дуге RS окружности ω так, что окружность Γ, описанная около треугольника JST, пересекает l в двух точках. Пусть A — та из них, которая ближе к R. Прямая AJ вторично пересекает ω в точке K. Докажите, что прямая KT касается Γ.

6. В строчку выписаны числа $\frac{1}{2002}, \frac{1}{2003}, \ldots, \frac{1}{2017}$. Лёша хочет поставить перед восемью из них знак "+", а перед восемью из них знак "—" так, чтобы модуль полученного выражения был минимален. Как ему быть?

7. Пусть $Q(t)$ — квадратный трёхчлен с двумя действительными корнями. Докажите, что существует приведённый многочлен $P(x)$, не являющийся константой, такой, что модули всех коэффициентов многочлена $Q(P(x))$, быть может кроме старшего, меньше чем 0,001.

8. Дано натуральное N. Натуральные числа от 1 до $N^2 + N$ выписаны в строчку в некотором порядке. Андрей Борисович хочет вычеркнуть $N^2 - N$ из них так, чтобы среди оставшихся $2N$ чисел ничего не стояло между двумя максимальными из них, между 3-м и 4-м по величине, … , между двумя минимальными из них. Обязательно ли у него это получится?