Конструктивы в ТЧ, часть 2

1. Конечно или бесконечно множество целочисленных решений уравнения **(a)** $x^2 - xy - y^2 = 1$; **(b)** $x^2 - xy - y^2 = -1$?

2. *Радикал* натурального числа N (обозначается $rad(N)$) — это произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $rad(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C, что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot rad(ABC)$?

3. Сумма шестых степеней шести целых чисел на единицу больше, чем их ушестерённое произведение. Конечно или бесконечно множество шестерок целых чисел с таким свойством?

4. Существуют ли такие натуральные числа $a, b, c > 1$, что $a^2 - 1$ делится на b, $b^2 - 1$ делится на c и $c^2 - 1$ делится на a, причем $a + b + c > 2018$?

5. Натуральное число N представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$, где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных?

Письменные задачи

6. Верно ли, что существует бесконечно много арифметический прогрессий, состоящих из 2017 различных натуральных чисел таких, что в каждой из них произведение всех членов является точной 2018-й степенью?

7. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа a, b и c, для которых a^2 делится на $b + c$, b^2 делится на $a + c$, c^2 делится на $a + b$?

[ЦПМ, кружок по математике, 8 класс] Убегающие
[*2017–2018*] *17 февраля 2018*

Конструктивы в ТЧ, часть 2

1. Конечно или бесконечно множество целочисленных решений уравнения **(a)** $x^2 - xy - y^2 = 1$; **(b)** $x^2 - xy - y^2 = -1$?

2. *Радикал* натурального числа N (обозначается $rad(N)$) — это произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $rad(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C, что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot rad(ABC)$?

3. Сумма шестых степеней шести целых чисел на единицу больше, чем их ушестерённое произведение. Конечно или бесконечно множество шестерок целых чисел с таким свойством?

4. Существуют ли такие натуральные числа $a, b, c > 1$, что $a^2 - 1$ делится на b, $b^2 - 1$ делится на c и $c^2 - 1$ делится на a, причем $a + b + c > 2018$?

5. Натуральное число N представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$, где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных?

Письменные задачи

6. Верно ли, что существует бесконечно много арифметический прогрессий, состоящих из 2017 различных натуральных чисел таких, что в каждой из них произведение всех членов является точной 2018-й степенью?

7. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа a, b и c, для которых a^2 делится на $b + c$, b^2 делится на $a + c$, c^2 делится на $a + b$?