

Алгебра с комбинаторной начинкой

Учимся говорить

1. (а) Докажите, что $\frac{(d_1+d_2+\dots+d_m)!}{d_1!d_2!\dots d_m!}$ – целое число.
(б) Докажите, что для любого натурального n число C_{2n}^n делится на $n+1$.
2. (а) Рассмотрим пути на клетчатом квадрате $n \times n$ из вершины $(0, 0)$ в вершину (n, n) , идущие только вверх и вправо и не поднимающиеся выше диагонали квадрата. Такие пути называются *путями Дика*.
Последовательность из n закрывающихся и n открывающихся скобок называется *правильной скобочной последовательностью*, если в любом её начальном куске открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся.
Установите биекцию между путями Дика и правильными скобочными последовательностями.
(б) Постройте какую-нибудь биекцию между путями Дика и разбиениями выпуклого $(n+2)$ -угольника диагоналями на треугольники.
(с) Докажите, что число путей из $(0, 0)$, которые поднимаются выше диагонали, равно числу всех путей из $(0, 0)$ в $(n-1, n+1)$. Найдите отсюда число путей Дика. Это число обозначается C_n и называется n -м числом Каталана.
3. Найдите сумму
$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$
4. (а) Сколько существует последовательностей из букв А и Б длины n , в которых никакие две буквы Б не стоят рядом?
(б) Пользуясь предыдущим пунктом, найдите сумму
$$C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots$$
5. (а) Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$.
Подсказка. Здесь написана сумма по всем подмножествам n -элементного множества числа элементов в подмножестве. Можно на это смотреть так: мы пробегаем все подмножества, и у каждого по разу считаем все его элементы. Сколько же мы так насчитаем? Та же подсказка другими словами: сколько есть способов выбрать из n человек команду (произвольного размера) и в этой команде выбрать капитана?
(б) Найдите сумму $C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + \dots + n^2C_n^n$.
6. Докажите, что при $n > 1$ выполняется равенство
$$C_n^1 - 2C_n^2 + \dots + (-1)^{n+1}nC_n^n = 0.$$

7.* Последовательность функций задана следующим образом:

$$Q_1(x) = x, \quad Q_{n+1}(x) = \frac{Q_n(x+1)}{Q_n(x)}$$

Пусть

$$Q_n(x) - 1 = \frac{A(x)}{B(x)},$$

где $A(x), B(x)$ — многочлены.

- (**a**) Найдите степень многочлена $A(X)$.
(**b**) Найдите старший коэффициент многочлена $A(x)$.

УЧИМСЯ ПИСАТЬ

8. Установите биекцию между путями Дика и способами заполнить таблицу $2 \times n$ числами от 1 до $2n$ так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце числа шли по убыванию.
9. (**a**) Докажите, что число $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ целое.
(**b***) Попробуйте придумать какую-нибудь комбинаторную интерпретацию этого числа.