

Кружок в “Хамовниках”. 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 1
Серия 9. Асимптотика или большое лучше видится издалека.

0. Петя и Вася по очереди красят точки на плоскости. Сначала Петя красит одну точку в красный, а затем Вася красит 2017 точек в голубой. Цель Пети получить равносторонний треугольник с вершинами в красных точках. Сможет ли Вася ему помешать?

1. Петя и Вася играют по очереди закрашивают клетки бесконечной белой клетчатой плоскости. За один ход Петя закрашивает 11 клеток зелёным, а Вася – 10 клеток красным. Перекрашивать клетки нельзя. Петя хочет нарисовать полностью зелёный квадрат 10 на 10. Сможет ли Вася ему помешать?

2. Докажите, что существует число, большее 1000000, которое нельзя представить в виде суммы квадрата и куба натуральных чисел.

3. Докажите, что для любого натурального числа n существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы n слагаемых, каждое из которых является n -й степенью натурального числа.

4. Пусть $\sigma(n)$ — сумма цифр числа n . Докажите, что найдется бесконечно много n таких, что

а) $\sigma(3^{n+1}) \leq \sigma(3^n)$

б) $\sigma(2^{n+1}) < \sigma(2^n)$

5. Из клетчатой плоскости вырезали клетки, обе координаты которых делятся на 1000. Докажите, что оставшиеся нельзя обойти конём.

6. Верно ли, что из любого числа можно получить квадрат, добавляя к его десятичной записи не более 100500 цифр? Цифры можно вписывать в любые места.