

Иррациональные уравнения и неравенства

Обязательное домашнее задание

1. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $\sqrt{4x+a} = 2x-1$.
2. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-2} = 1, \\ x+y-20 = 0 \end{cases}$$
3. Решить в зависимости от значений параметра a : $\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x$.
4. Решить уравнение $\frac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}} = 6-x$.
5. В зависимости от значений параметров a и b решить уравнение $\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{b-x} = \sqrt[4]{a+b-2x}$.
6. Пусть $a > 0, b > 0$. Найти решения неравенства $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} > \frac{1}{x} - \frac{1}{b}$.
7. Для каждого значения параметра $b \leq 0$ решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} > b$.
8. При каких значениях параметра a решения неравенства $\sqrt{9-x^2} \geq -a^2x$ образуют промежуток длины $15/4$? Найти значения x , принадлежащие этому промежутку.
9. При каждом значении параметра a найти все решения неравенства $x+2a-2\sqrt{3ax+a^2} > 0$.
10. При каком значении параметра a все числа из отрезка $-1 \leq x \leq 3$ удовлетворяют неравенству $2ax + 2\sqrt{2x+3} - 2x + 3a - 5 < 0$?

Дополнительное домашнее задание

1. Число a подобрано так, что уравнение $\sqrt{x-\sqrt{3}} + a^2x^2 + 2ax(\sqrt{6}-\sqrt{3}) = 6\sqrt{2}-9$ имеет решение. Найти это решение.
2. При каких значениях параметров a, b, c уравнение $\sqrt{x+a\sqrt{x}+b} + \sqrt{x} = c$ имеет бесконечно много решений?
3. Доказать, что все решения неравенства $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1} > 2$ удовлетворяют неравенству $x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4-2x^2+1} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2-1}$.
4. Найти все значения параметра b , при которых уравнение
$$3 \cdot \sqrt[5]{x+2} - 16b^2 \cdot \sqrt[5]{32x+32} = \sqrt[10]{x^2+3x+2}$$
 имеет единственное решение.
5. Найти все значения параметра a , при которых уравнение
$$a + \sqrt{6x-x^2-8} = 3 + \sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$$
 имеет ровно одно решение.