

Полезные преобразования и замены переменных

Обязательное домашнее задание

1. Решить систему:
$$\begin{cases} 2^{-x} \cdot y^4 - 2y^2 + 2^x \leq 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Определить все действительные a , при каждом из которых уравнение

$$\cos^4 x - (a + 2) \cos^2 x - (a + 3) = 0$$

имеет решения, и найти все эти решения.

3. Найти все пары значений (x, y) , являющиеся решениями системы
$$\begin{cases} \sin x + \frac{1}{\cos y} = 2\sqrt[3]{14}, \\ \sin x \cdot \frac{1}{\cos y} = \sqrt[3]{196} - 2 \end{cases}$$
 и удовлетворяющие условиям $0 < x < \pi$; $-\pi/2 < y < \pi/2$.

4. Найти все действительные значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x \end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2 + y^2 \leq a^2$.

5. Решить систему:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0 \end{cases}$$

6. Решить систему:
$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$$

7. Решить систему:
$$\begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1 \end{cases}$$

8. Найти все пары $(m; n)$, при которых уравнение

$$(3x^2 - 2m^2 + mn)^2 + (3m^2 - mn + 2n^2 - 12x)^2 + 4 = 4x - x^2$$

имеет хотя бы одно решение.

9. Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение $8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$?

10. Решить систему:
$$\begin{cases} |x - y| - \log_2^2(|x| + y + 1) + 6 = 0, \\ (x - y)^2 - 6(x - y) \log_2(|x| + y + 1) + 5 \log_2^2(|x| + y + 1) = 0 \end{cases}$$

Домашнее задание по теме:

Полезные преобразования и замены переменных

Дополнительное домашнее задание

1. Найти наименьшее произведение xy , где x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + y = 3a - 1, \\ x^2 + y^2 = 4a^2 - 2a + 2 \end{cases}$$

2. Найти все целые значения n , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 6x^2 + 24y(x + y) + 2(3n - 2)x + 4(3n - 2)y + 3 = 0, \\ 4(x^2 + y^2) + (4n + 2)y + 2n^2 = 8xy + (4n + 2)x + 5/2 \end{cases}$$

имеет решения. Найти эти решения.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y^4 - 4y^3 - 16y^2 - 8xy - 4x^2 + 32y + 64 = 0, \\ \sin(5\pi x) - \sqrt{x(x-6)+13} \cdot \cos(\pi(y^2 + 2x + 1/2)) + \sin(\pi(2y^2 - x)) = 0 \end{cases}$$

4. Найти все решения $(x; y; z)$ системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^2(13 - y - z) + x(2y + 2z - 2yz - 26) + 5yz - 7y - 7z + 30 = 0, \\ x^3 + x^2(17 - y - z) - x(2y + 2z + 2yz - 26) + y + z - 3yz - 2 = 0 \end{cases}$$

такие, что x принадлежит отрезку $[4; 7]$

5. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\left| x^4 + \frac{2a-1}{3}x^2 + \frac{2a^2+a+2}{12} \right| = \frac{a}{2} \left| x^2 + \frac{a}{3} - \frac{1}{6} \right| + \frac{a+1}{6}$$