$n > 10$ расстановка $n,\ n-1,\ n-2,\ n-3,\ n-4,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1$ — единственная, удовлетворяющая условию.

Комментарий. Только верный ответ или верный ответ с предъявлением одной из двух искомых расстановок — 0 баллов.

Баллы за следующие продвижения из разных пунктов а), б), в) суммируются.

а) Найдены два примера расстановок, удовлетворяющих условию — 1 балл.

б) Доказано, что числа $n-1$ и $n-2$ стоят рядом — 2 балла.

Если доказано только, что два чётных числа не стоят рядом — ставится 1 балл из этих 2.

в) В предположении, что $n-1$ и $n-2$ стоят рядом, доказано, что цепочка однозначно продолжается до одного из примеров $(n-1, n-2, n-3, \ldots, 2, 1, n)$ или $(2k, 2k-1, 2k-2, \ldots, k+1, 2k+1, k, k-1, k-2, \ldots, 1)$ — 4 балла.

Если доказано только, что продолжение имеет вид $(n-1, n-2, \ldots, d+1, d, n, \ldots)$ при некотором d — ставится 1 балл из этих 4.

Если доказано, что продолжение имеет вид $(n-1, n-2, n-3, \ldots, 2, 1, n)$ или $(2k, 2k-1, 2k-2, \ldots, k+1, 2k+1, k, \ldots)$ — ставятся 3 балла из этих 4.

11 класс

11.1. Внутри выпуклого пятиугольника отметили точку и соединили её со всеми вершинами. Какое наибольшее число из десяти проведенных отрезков (пяти сторон и пяти отрезков, соединяющих отмеченную точку с вершинами пятиугольника) может иметь длину 1? *(А. Кузнецов)*

Ответ. 9 отрезков.

Решение. Сначала докажем, что все 10 отрезков не могут иметь длину 1. Предположим противное. Пусть $ABCDE$ — пятиугольник, O — точка внутри него, и все 10 проведенных отрезков имеют длину 1 (см. рис. 6). Тогда треугольники OAB, OBC, OCD, ODE и OEA — правильные, поэтому $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle AOE = 60^\circ$. Сумма же этих углов должна быть равна 360°, однако $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$ — противоречие.

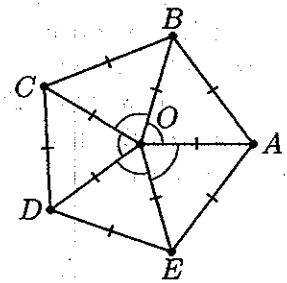

Рис. 6

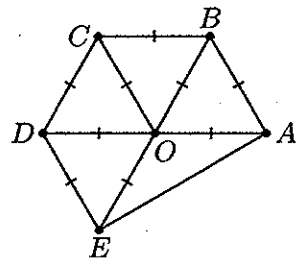

Рис. 7

Осталось привести пример, когда 9 отрезков имеют длину 1 (см. рис. 7). Отметим на плоскости точки A и O на расстоянии 1. выберем последовательно точки B, C, D и E так, чтобы треугольники AOB, BOC, COD и DOE были равносторонними. Тогда точка O лежит внутри пятиугольника $ABCDE$, и из 10 проведенных отрезков все, кроме AE, имеют длину 1.

Замечание. В приведённом примере точки A, B, C, D и E являются пятью вершинами правильного шестиугольника со стороной 1.

Комментарий. Доказано только, что отрезков единичной длины не более 9 — 3 балла.

Только пример, показывающий, что могут найтись 9 отрезков единичной длины — 3 балла.

11.2. В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы? *(И. Богданов)*

Ответ. Да, обязательно.

Решение. Покажем, что требуемому условию удовлетворяют *любые* два столбца таблицы. Выкинем из таблицы все столбцы, кроме двух рассматриваемых. Общее число нулей в этих столбцах больше общего числа единиц; это значит, что нулей в них не меньше 1002. Если в полученной таблице k строк с двумя нулями, то есть ещё хотя бы $1002 - 2k$ строк с одним нулём — и, следовательно, не более $1001 - k - (1002 - 2k) = k - 1$ столбцов с двумя единицами. Осталось заметить, что $k - 1 < k$.

11.3. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 135^\circ$. Пусть M — середина отрезка AC. Точка O — центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D. Докажите, что центр окружности Γ, описанной около треугольника BOD, лежит на прямой AC. *(А. Кузнецов)*

Решение. Так как $\angle ABC = 135^\circ$, то $\angle AOC = 90^\circ$. Так как OM — медиана в прямоугольном треугольнике AOC, имеем $OM = AM = MC$. На продолжении отрезка OM за точку M отметим точку E так, что $OM = ME$ (см. рис. 8). Поскольку четырёхугольник $ABCD$ вписанный,

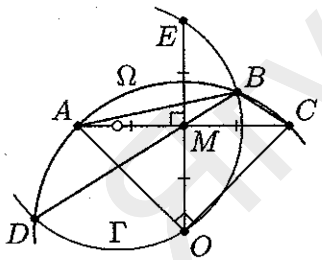

Рис. 8

$BM \cdot MD = AM \cdot MC = OM \cdot ME$. Следовательно, точка E лежит на окружности Γ. Точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC, поэтому $AC \perp OM$. Значит, прямая AC является серединным перпендикуляром к отрезку OE. Поскольку отрезок OE является хордой окружности Γ, её центр лежит на прямой AC.

11.4. Изначально на доску выписали числа $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$. Каждую минуту с доски стираются все три написанных на ней числа x, y и z, а вместо них на доску записываются числа x^2+xy+y^2, y^2+yz+z^2 и z^2+xz+x^2. Могут ли в некоторый момент все три числа на доске оказаться рациональными? *(С. Кудря)*

Ответ. Нет, не могут.

Решение. Рассмотрим попарные разности выписанных чисел. За одну операцию набор разностей $x-y$, $y-z$, $z-x$ переходит в набор $(y-x)(x+y+z)$, $(z-y)(x+y+z)$, $(x-z)(x+y+z)$. Так как в исходный момент эти разности равнялись $1-2\sqrt{2}$, -1 и $2\sqrt{2}$, в любой момент времени попарные разности будут иметь вид $A(1-2\sqrt{2})$, $-A$ и $2A\sqrt{2}$ при некотором A. Эти три разности могут быть одновременно рациональными лишь при $A = 0$. Осталось показать, что этого не произойдёт.

Предположим, что после n-ой минуты число A впервые обнулилось. Из наших формул вытекает, что после $(n-1)$-ой минуты впервые обнулилась сумма выписанных чисел. Но изначально сумма выписанных чисел ненулевая, а после первой же минуты все они становятся неотрицательными, поскольку $a^2 + ab + b^2 = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \geqslant 0$, причем равенство достигается лишь при $a = b = 0$. Значит, после $(n-1)$-ой минуты все числа на доске оказались нулевыми. Но это противоречит тому, что после n-ой минуты A обнулилось впервые: ведь в этом случае после $(n-1)$-ой минуты все попарные разности чисел уже должны быть нулевыми.

Замечание. Приведём схему другого подхода к задаче. Ясно, что в каждый момент времени любое число на доске имеет вид $a + b\sqrt{2}$ для некоторых целых a и b. При этом чётности этих чисел после n-ой минуты зависят лишь от чётностей соответствующих чисел на предыдущей минуте. Заменяя теперь в каждом числе вида $a + b\sqrt{2}$ числа a и b на их остатки от деления на 2, получаем, что исходные числа имели вид $1 + \sqrt{2}$, $0 + \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$, после первой минуты полученные числа имеют вид $1 + \sqrt{2}$, $1 + 0\sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$, а на каждой следующей минуте из тройки чисел $1 + \sqrt{2}$, $1 + 0\sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$ получается такая же. Значит, на доске всегда найдётся число вида $a + b\sqrt{2}$ с нечётным (а значит, ненулевым) b.

Комментарий. Доказано лишь, что после первой минуты все числа на доске будут положительными — 1 балл.

Задача сведена к доказательству того, что сумма чисел на доске не может оказаться нулевой — 3 балла.

Замечено лишь, что все числа на доске имеют вид $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b — 0 баллов.

Дополнительно показано, что чётности коэффициентов a и b после n-й минуты зависят лишь от чётностей коэффициентов на предыдущей минуте — 2 балла.

11.5. Назовём *лодочкой* трапецию  с основаниями 1 и 3, получающуюся приклеиванием к противоположным сторонам единичного квадратика двух треугольничков (полуклеток). В квадрате 100×100 расположена невидимая лодочка (её можно поворачивать, она не выходит за границы квадрата, её средняя клетка целиком лежит на одной из клеток квадрата). Одним выстрелом можно накрыть любую треугольную половинку клетки. Если выстрел пересекается с внутренностью лодочки (т. е. пересечение треугольника выстрела с лодочкой имеет ненулевую площадь), то она считается потопленной. Какого наименьшего количества выстрелов достаточно, чтобы наверняка потопить лодочку? (*С. Берлов, Н. Власова*)

Ответ. 4000 выстрелов.

Первое решение. Будем называть лодочку *горизонтальной* или *вертикальной* в зависимости от того, горизонтальны или вертикальны её параллельные стороны.

Покажем сначала, что 4000 выстрелов хватит. Разобьём квадрат 100×100 на 400 квадратов размером 5×5, и в каждом квадрате произведем 10 выстрелов, как показано на рис. 9. Нетрудно видеть, что в каждой строке и в каждом столбце между соседними выстрелами нельзя вставить лодочку; значит, один из выстрелов обязательно потопит лодочку.

Осталось показать, что нельзя гарантированно потопить лодочку менее, чем за 4000 выстрелов. На сей раз разобьём доску на 2000 горизонтальных прямоугольников 1×5 и покажем, что в каждый такой прямоугольник надо сделать хотя бы два выстрела. Действительно, в левые три клетки прямоугольника нужно сделать хотя бы один выстрел, иначе в них могла расположиться непотопленная лодочка; то же верно для его правых трёх клеток. Значит, в этот прямоугольник могло быть сделано не более одного выстрела, только если единственный выстрел попал в центральную клетку прямоугольника. Без ограничения общности, этот выстрел был произведён в левый нижний треугольничек этой клетки; но тогда лодочка, расположенная как на рис. 10, не будет потоплена.

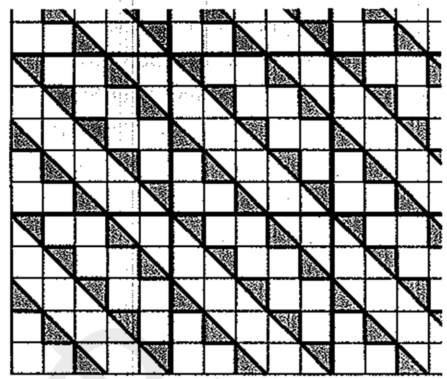

Рис. 9

Рис. 10

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что потребуется хотя бы 4000 выстрелов. Разобьём квадрат на 100 горизонтальных полосок 1×100 и покажем, что даже для гарантированного затопления горизонтальной лодочки уже требуется не менее 40 выстрелов в каждую из полосок.

Посчитаем количество различных способов расположить горизонтальную лодочку в полоске. Центральная клетка такой лодочки может располагаться в любой клетке полоски, кроме крайних. Для каждой из этих 98 клеток возможны два варианта расположения горизонтальной лодочки именно с этой центральной клеткой. Итого, искомое количество способов равняется $98 \times 2 = 196$.

С другой стороны, выстрел в какой-либо из треугольников в полоске может потопить максимум пять из этих возможных лодочек. Действительно, если этот треугольник, скажем, левый верхний в своей клетке c, то он потопит любую из двух лодочек с центральной клеткой c, любую из двух, центральная клетка которых непосредственно слева от c, и одну из двух, централь-