10 класс

10.1. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

(Методкомиссия)

Решение. Один из многих возможных примеров приведён на рис. 4.

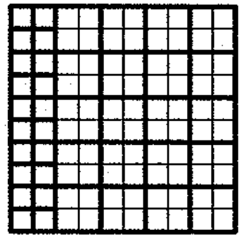

Рис. 4

Комментарий. Любой верный пример разрезания — 7 баллов.

10.2. Петя и Вася по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 2018 (выписывать уже имеющееся число запрещено); начинает Петя. Если после хода игрока на доске оказываются три числа, образующих арифметическую прогрессию, — этот игрок выигрывает. У кого из игроков есть стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть? *(М. Дидин, П. Кожевников)*

Ответ. У Васи.

Решение. Рассмотрим момент после третьего хода (когда выписаны три числа). Если к этому моменту никто еще не выиграл, то следующим ходом Вася выигрывает — ему достаточно найти два выписанных числа одной чётности и выписать своим ходом их среднее арифметическое (оно является целым числом).

Кроме того, заметим, что если три целых числа из множества $1, 2, 3, \ldots, 2018$ образуют арифметическую прогрессию, то её разность не больше 1008 (иначе разность между наибольшим и наименьшим числами будет не менее $2 \cdot 1009 = 2018$, что невозможно).

Теперь опишем выигрышную стратегию Васи.

Пусть первым ходом Петя выписал число a. Предположим, что $a \leqslant 1009$. Тогда Вася выписывает то из чисел 2017 или 2018, чётность которого отлична от чётности числа a (обозначим это число через b). После этого хода выписано два числа разной чётности; значит, они не могут быть первым и третьим членом прогрессии из целых чисел. А поскольку $b - a \geqslant 1009$, они также не могут быть соседними членами прогрессии. Тем самым, Петя

не сможет выиграть третьим ходом. Но в этом случае, как мы видели ранее, следующим ходом Вася выиграет.

Если же $a \geqslant 1010$, то Вася отвечает, выписывая то из чисел 1 и 2, которое по чётности отличается от a. Дальнейшие рассуждения аналогичны первому случаю.

Комментарий. Верный ответ без обоснований (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

Предъявление стратегии, которая не работает хотя бы в одном случае — 0 баллов.

Предъявлена верная стратегия для Васи без обоснования, что она работает — 5 баллов.

Доказано только, что в момент, когда на доске выписаны три числа, следующим ходом всегда можно выиграть — 2 балла.

10.3. Положительные числа x, y таковы, что $x^5 - y^3 \geqslant 2x$. Докажите, что $x^3 \geqslant 2y$. *(Н. Агаханов)*

Решение. Требуемое неравенство равносильно неравенству $x^9 \geqslant 8y^3$. По условию, $8(x^5 - 2x) \geqslant 8y^3$; значит, достаточно доказать неравенство $x^9 \geqslant 8x^5 - 16x$. Перенося в последнем неравенстве все члены в левую часть, получаем неравенство $x(x^4 - 4)^2 \geqslant 0$, которое верно для положительного x. Значит, и требуемое неравенство также верно.

Комментарий. Задача сведена к доказательству неравенства $x^9 \geqslant 8x^5 - 16x$ (или эквивалентного) для положительного x — 3 балла.

10.4. Пусть O — центр окружности Ω, описанной около остроугольного треугольника ABC. На дуге AC этой окружности, не содержащей точку B, взята точка P. На отрезке BC выбрана точка X так, что $PX \perp AC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BXP, лежит на окружности, описанной около треугольника ABO. *(И. Фролов)*

Решение. Пусть G — центр окружности γ, описанной около треугольника BXP (см. рис. 5). Тогда $\angle BGP = \overset{\frown}{BXP} = 2\angle CXP$ (так как угол CXP острый). Поскольку $GB = GP$ и $OB = OP$, треугольники GOB и GOP равны по трём сторонам, откуда $\angle BGO = \angle OGP = \frac{1}{2}\angle BGP = \angle CXP$. Наконец, из равнобедренного треугольника AOB получаем $\angle BAO = 90^\circ -$

$-\frac{1}{2}\angle AOB = 90° - \angle ACB = \angle CXP$. Итак, $\angle BGO = \angle CXP = \angle BAO$, что и означает, что точки A, G, B и O лежат на одной окружности.

Замечание. Завершить решение можно по-другому, доказав, что точка G лежит на прямой AP (поскольку $\angle BPG = \angle BCA = \angle BPA$), и воспользовавшись равенством $\angle OGP = \angle CXP = \angle ABO$.

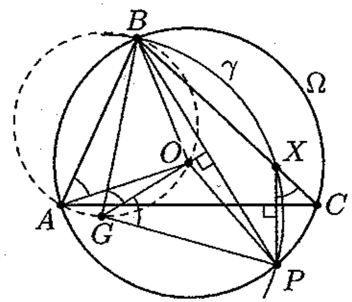

Рис. 5

Комментарий. Доказано, что $\angle BGP$ не зависит от положения точки P — 1 балл.

Доказано, что при всевозможных положениях точки P все полученные точки G лежат на *некоторой* фиксированной окружности — 3 балла.

10.5. Дано нечётное число $n > 10$. Найдите количество способов расставить по кругу в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, n$ так, чтобы каждое число являлось делителем суммы двух соседних с ним чисел. (Способы, отличающиеся поворотом или отражением, считаются одинаковыми.) *(Д. Храмцов)*

Ответ. Два способа.

Решение. Рассмотрим произвольную расстановку чисел от 1 до n, удовлетворяющую требованиям. Предположим, что два чётных числа x и y стоят рядом, а следующее за ними число — z. Так как $x + z$ делится на y, число z также чётно. Продолжая таким же образом движение по кругу, получим, что все числа в расстановке чётны, что невозможно. Итак, никакие два чётных числа не стоят рядом; значит, некоторые два нечётных числа стоят рядом, а остальные чётные и нечётные чередуются.

Заметим, что оба соседа числа n не могут быть чётными; действительно, в противном случае их сумма делилась бы на $2n$, то есть была бы не меньше $2n$. Значит, у любого нечётного числа, меньшего n, либо оба соседа чётны, либо одним из соседей является число n.

Предположим, что числа n и $n-2$ — соседи, а другой сосед

числа $n-2$ — число t. Число $t + n = (n-2) + (t+2)$ должно делиться на $n-2$, что возможно лишь при $t = n-4$. Но тогда три нечётных числа n, $n-2$, $n-4$ стоят подряд, что, как мы доказали, невозможно.

Итак, оба соседа нечётного числа $n-2$ чётны, а потому их сумма делится на $2(n-2)$, то есть эта сумма не меньше $2(n-2)$; это возможно лишь если эти соседи — $n-1$ и $n-3$. В частности, числа $n-1$ и $n-2$ — соседи. Если пара $n-1$, $n-2$ продолжается далее числами, идущими подряд по убыванию вплоть до числа 1, мы приходим к круговой расстановке $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, $\ldots$, 3, 2, 1, n, которая, очевидно, удовлетворяет условию.

Предположим теперь, что пара $n-1$, $n-2$ продолжается далее числами, идущими подряд по убыванию, вплоть до числа $d > 1$, а после него следует число $x \neq d-1$. Итак, у нас имеется подряд идущие по окружности числа $n-1$, $n-2$, $\ldots$, $d+1$, d, x, y, $\ldots$. Так как $x + (d+1) = (x+1) + d$ делится на d, то $x+1$ делится на d, в частности, $x \geqslant d-1$. Но x отлично от чисел $d-1, d, \ldots, n-2, n-1$; значит, единственный оставшийся вариант — это $x = n$.

Пусть $n = 2k+1$. Мы получили, что число $n+1 = 2k+2$ делится на d; так как $d < n$, имеем $d \leqslant k+1$. С другой стороны, $y \leqslant d-1 \leqslant k$ (так как все числа, большие $d-1$, уже использованы). Отсюда $d + y \leqslant (k+1) + k = n$. Так как $d + y$ должно делиться на $x = n$, приходим к единственной возможности: $d = k+1$, $x = n$, $y = k$. Итак, у нас имеются подряд идущие по окружности числа $2k, 2k-1, 2k-2, \ldots, k+2, k+1, 2k+1, k, a, \ldots$.

Так как $a \leqslant k-1$ (все числа, большие $k-1$, уже использованы) и число $(2k+1) + a = 2k + (a+1)$ делится на k, однозначно находим $a = k-1$. Аналогично, если последовательность продолжается далее числами $k-1$, $k-2$, $\ldots$, $b+1$, b, идущими подряд по убыванию, а далее следует число y, однозначно находим $y = b-1$ (поскольку $b+1+y$ делится на b, и $y \leqslant b-1$). Итак, мы приходим к круговой расстановке $2k$, $2k-1$, $2k-2$, $\ldots$, $k+2$, $k+1$, $2k+1$, k, $k-1$, $k-2$, $\ldots$, 1, которая, очевидно, удовлетворяет условию (и отлична от найденной ранее).

Замечание. Тем же методом, который использовался в решении, можно доказать, что в аналогичной задаче для чётного

$n > 10$ расстановка $n,\ n-1,\ n-2,\ n-3,\ n-4,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1$ — единственная, удовлетворяющая условию.

Комментарий. Только верный ответ или верный ответ с предъявлением одной из двух искомых расстановок — 0 баллов.

Баллы за следующие продвижения из разных пунктов а), б), в) суммируются.

а) Найдены два примера расстановок, удовлетворяющих условию — 1 балл.

б) Доказано, что числа $n-1$ и $n-2$ стоят рядом — 2 балла.

Если доказано только, что два чётных числа не стоят рядом — ставится 1 балл из этих 2.

в) В предположении, что $n-1$ и $n-2$ стоят рядом, доказано, что цепочка однозначно продолжается до одного из примеров $(n-1, n-2, n-3, \ldots, 2, 1, n)$ или $(2k, 2k-1, 2k-2, \ldots, k+1, 2k+1, k, k-1, k-2, \ldots, 1)$ — 4 балла.

Если доказано только, что продолжение имеет вид $(n-1, n-2, \ldots, d+1, d, n, \ldots)$ при некотором d — ставится 1 балл из этих 4.

Если доказано, что продолжение имеет вид $(n-1, n-2, n-3, \ldots, 2, 1, n)$ или $(2k, 2k-1, 2k-2, \ldots, k+1, 2k+1, k, \ldots)$ — ставятся 3 балла из этих 4.

11 класс

11.1. Внутри выпуклого пятиугольника отметили точку и соединили её со всеми вершинами. Какое наибольшее число из десяти проведенных отрезков (пяти сторон и пяти отрезков, соединяющих отмеченную точку с вершинами пятиугольника) может иметь длину 1? *(А. Кузнецов)*

Ответ. 9 отрезков.

Решение. Сначала докажем, что все 10 отрезков не могут иметь длину 1. Предположим противное. Пусть $ABCDE$ — пятиугольник, O — точка внутри него, и все 10 проведенных отрезков имеют длину 1 (см. рис. 6). Тогда треугольники OAB, OBC, OCD, ODE и OEA — правильные, поэтому $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle AOE = 60^\circ$. Сумма же этих углов должна быть равна 360°, однако $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$ — противоречие.

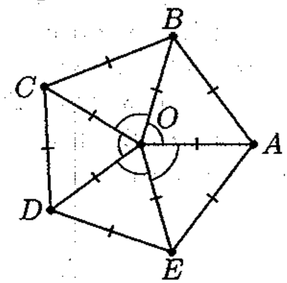

Рис. 6

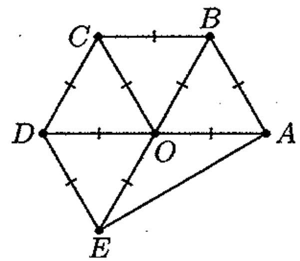

Рис. 7

Осталось привести пример, когда 9 отрезков имеют длину 1 (см. рис. 7). Отметим на плоскости точки A и O на расстоянии 1. выберем последовательно точки B, C, D и E так, чтобы треугольники AOB, BOC, COD и DOE были равносторонними. Тогда точка O лежит внутри пятиугольника $ABCDE$, и из 10 проведенных отрезков все, кроме AE, имеют длину 1.

Замечание. В приведённом примере точки A, B, C, D и E являются пятью вершинами правильного шестиугольника со стороной 1.

Комментарий. Доказано только, что отрезков единичной длины не более 9 — 3 балла.

Только пример, показывающий, что могут найтись 9 отрезков единичной длины — 3 балла.