ходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

(*Методкомиссия*)

Решение. Один из многих возможных примеров приведён на рис. 1.

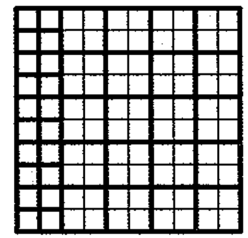

Рис. 1

Комментарий. Любой верный пример разрезания — 7 баллов.

9.2. На доске написаны пять натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трёх из них делится на каждое из остальных. Обязательно ли среди этих чисел найдутся четыре равных?

(*С. Берлов, Д. Храмцов*)

Ответ. Да, обязательно.

Решение. Пусть a, b, c, d и e — числа на доске в неубывающем порядке, то есть $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Тогда по условию $a+b+c$ и $b+c+d$ делятся на e. Следовательно, $d-a = (b+c+d)-(a+b+c)$ также делится на e. Поскольку $0 \leqslant d-a < d \leqslant e$, это возможно лишь при $d-a=0$. Значит, $a=b=c=d$ (так как $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$).

Замечание. Можно показать, что условию задачи удовлетворяют только пятёрки чисел вида (a,a,a,a,a) и $(a,a,a,a,3a)$ (возможно, с переставленными числами).

Комментарий. Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

Доказано только, что среди чисел найдутся два равных — 2 балла.

Доказано только, что разность любых двух чисел с доски делится на любое из оставшихся — 3 балла.

9.3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.

(*А. Кузнецов*)

Ответ. 90°.

Первое решение. Обозначим через N середину отрезка AD. Поскольку треугольник AED равнобедренный, его медиана EN является высотой, то есть $EN \perp AD$. Значит, $NE \perp BC$ (см. рис. 2).

Поскольку $AD \parallel BC$ и $BM = MC = AN = ND = AD/2$, четырёхугольники $ABMN$ и $BMDN$ — параллелограммы, откуда $AB \parallel MN$ и $BN \parallel DM$. Так как $\angle ABE = 90^\circ$ и $AB \parallel MN$, получаем $BE \perp MN$. Таким образом, E — точка пересечения высот треугольника BMN, откуда $ME \perp BN$. Наконец, из $BN \parallel DM$, получаем $ME \perp DM$, то есть $\angle DME = 90^\circ$.

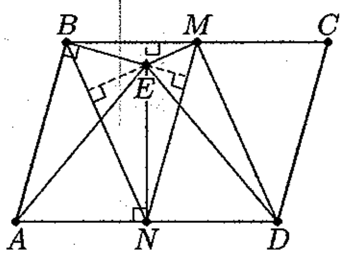

Рис. 2

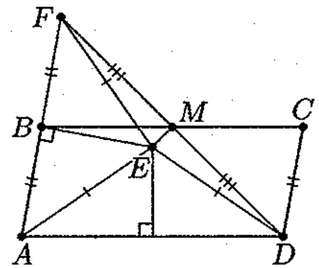

Рис. 3

Второе решение. На продолжении отрезка AB за точку B отметим точку F так, что $AB = BF$ (см. рис. 3). Тогда $BF = CD$ и $BF \parallel CD$, поэтому четырёхугольник $BDCF$ — параллелограмм. Точка M — середина диагонали BC этого параллелограмма, значит, M — середина его диагонали DF.

Прямая BE — серединный перпендикуляр к отрезку AF, откуда $AE = FE$. Из условия теперь получаем, что $DE = AE = FE$. Значит, точка E лежит и на серединном перпендикуляре к DF. Отсюда $\angle EMD = 90^\circ$.

9.4. Кондитерская фабрика выпускает N сортов конфет. На Новый год фабрика подарила каждому из 1000 учеников школы подарок, содержащий по конфете нескольких сортов (составы подарков могли быть разными). Каждый ученик заметил, что для любых 11 сортов конфет он получил конфету хотя бы одного из этих сортов. Однако оказалось, что для любых двух сортов найдётся ученик, получивший конфету ровно одного из этих

двух сортов. Найдите наибольшее возможное значение N.

(Д. Храмцов)

Ответ. $N = 5501$.

Решение. Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_N$ множества учеников, **не получивших** конфет соответственно 1-го, 2-го, ..., N-го сортов. Согласно условию, все эти множества различны; кроме того, каждый ученик содержится не более, чем в десяти из них. Отсюда следует, что суммарное количество элементов в наших множествах не превосходит $1000 \cdot 10 = 10000$.

Пусть среди наших множеств ровно k одноэлементных. Тогда количество множеств из более, чем одного ученика, не превосходит $\frac{10000-k}{2}$, поэтому общее число всех непустых множеств не превосходит $\frac{10000-k}{2} + k = \frac{10000+k}{2} \leqslant \frac{11000}{2} = 5500$. С учётом того, что одно из множеств может быть пустым, получаем, что $N \leqslant 5501$.

Осталось показать, как описанная ситуация могла возникнуть при $N = 5501$. Сделаем множество A_{5501} пустым; различные множества $A_{4501}, \ldots, A_{5500}$ будут содержать по одному ученику. Осталось выбрать различные двухэлементные множества $A_1, \ldots, A_{4500}$ так, чтобы каждый из учеников был ровно в 9 из них. Для этого, например, можно разбить учеников на 100 групп по 10 человек и взять все пары детей, находящихся в одной группе (их получится как раз $100 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 4500$).

Замечание. Достраивать пример можно по-разному. Можно, в частности, выстроить детей по кругу и каждое двухэлементное множество составлять либо из пары противоположных учеников (таких пар 500), либо из пары учеников, между которыми стоят не больше трёх других детей.

Комментарий. Только верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

Только доказательство того, что $N \leqslant 5501$ — 4 баллов.

Только пример с $N = 5501$ сортами — 3 балла.

Если участник не учёл того, что один сорт может присутствовать во всех подарках (т.е. соответствующее множество A_i может быть пустым) и из-за этого получил ответ 5500 — снимается 1 балл.

9.5. Числа x, y и z удовлетворяют условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Л. Емельянов, методкомиссия)

Первое решение. Поскольку при любой перестановке переменных левая часть неравенства либо не меняется, либо меняет знак, достаточно проверить неравенство для любой перестановки чисел x, y и z, для которой левая часть неотрицательна. Поэтому можно считать, что $x \geqslant y \geqslant z$.

По неравенству о средних для двух чисел имеем

$$(x-y)(y-z) \leqslant \left(\frac{(x-y)+(y-z)}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-z}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{(x-z)^3}{4},$$

и нам достаточно доказать, что $x - z \leqslant \sqrt{2}$ или, что тоже самое, $(x-z)^2 \leqslant 2$. Последнее уже просто; действительно,

$$(x-z)^2 = 2x^2 + 2z^2 - (x+z)^2 \leqslant 2x^2 + 2z^2 = 2 - 2y^2 \leqslant 2.$$

Второе решение. Как и в первом решении, мы считаем, что $x \geqslant y \geqslant z$. Обозначим $a = x - y \geqslant 0$, $b = y - z \geqslant 0$; тогда $y = x - a$, $z = y - b$. Равенство из условия задачи преобразуется к виду

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + (x-a)^2 + (x-a-b)^2 - 1 = \\ &= 3x^2 - 2(2a+b)x + (2a^2 + 2ab + b^2 - 1), \end{aligned} \qquad (1)$$

а требуемое неравенство — к виду

$$ab(a+b) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Рассмотрим правую часть равенства (1) как квадратный трёхчлен от x. Поскольку он имеет корень, его дискриминант неотрицателен, то есть

$$0 \leqslant (2a+b)^2 - 3(2a^2 + 2ab + b^2 - 1) = 3 - 2(a^2 + ab + b^2),$$

откуда

$$a^2 + ab + b^2 \leqslant \frac{3}{2}. \qquad (3)$$

Осталось показать, как из (3) следует (2) (при $a, b \geqslant 0$).

По неравенству о средних для двух чисел имеем $a^2 + b^2 + ab \geqslant 2ab + ab = 3ab$, откуда $ab \leqslant \frac{1}{2}$. Значит,

$$(a+b)^2 = (a^2 + ab + b^2) + ab \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

то есть $a + b \leqslant \sqrt{2}$. Итак,

$$ab(a+b) \leqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

что и требовалось.

Замечание. Число $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в условии задачи нельзя заменить на меньшее, как показывает пример $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Комментарий. Показано, что утверждение задачи достаточно доказать при $x \geqslant y \geqslant z$ (или при любом другом фиксированном упорядочении переменных) — 0 баллов.