

LXXXII МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

17 марта 2019 года • 10 класс

Задача 1. Приведите пример девятизначного натурального числа, которое делится на 2, если зачеркнуть вторую (слева) цифру, на 3 — если зачеркнуть в исходном числе третью цифру, …, делится на 9, если в исходном числе зачеркнуть девятую цифру.

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB' . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO .

Задача 3. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

Задача 4. Каждая точка плоскости раскрашена в один из трёх цветов. Обязательно ли найдётся треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет?

Задача 5. Петя и Вася играют в игру. Для каждого из пяти различных переменных из набора x_1, \dots, x_{10} имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. Когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?

Задача 6. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0, 0)$ и вершинами в точках с целыми координатами, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которых можно разбить на двухклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

XVII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 14 апреля.

Подробности — на странице olympiads.mccme.ru/ustn/

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXII Московской математической олимпиады
на сайте mccme.ru/mmo/