АБИТУРИЕНТ

Готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

В.В. Локоть

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

издательство АРКТИ

АБИТУРИЕНТ

Готовимся к ЕГЭ
МАТЕМАТИКА

В.В. Локоть

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

издательство
АРКТИ
МОСКВА
2004

УДК 373:51
ББК 74.26.+22.1
Л 73

Научный редактор:

Зотиков С.В. — доцент, заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики Мурманского государственного университета.

Рецензенты:

Бродский И.Л. — профессор кафедры естественно-математического образования МОИПКРО;

Годзь Т.Е. — директор гимназии № 4 г. Мурманска, заслуженный учитель РФ.

Локоть В.В.

Л 73 Задачи с параметрами. Показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы. — М.: АРКТИ, 2004. — 96 с. *(Абитуриент: Готовимся к ЕГЭ)*.

ISBN 5-89415-376-X

В пособии приведены решения более 150 задач с параметрами (показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы). Оно адресовано учителям, студентам, учащимся 11-го класса.

Материал может быть использован при подготовке к Единому государственному экзамену (ЕГЭ). В заключительной части пособия рассмотрены решения задач с параметрами, предлагавшимися на ЕГЭ в 2002–2003 годах.

УДК 373:51
ББК 74.26.+22.1

ISBN 5-89415-376-X

Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников, но их решение вызывает у них значительные затруднения. Это связано с тем, что каждое уравнение или неравенство с параметрами представляет собой целый класс обычных уравнений и неравенств, для каждого из которых должно быть получено решение. Такие задачи постоянно предлагаются на едином государственном экзамене и на вступительных экзаменах в вузы.

Материал пособия рассчитан на учащихся 11 классов. В пособии нет очень сложных задач, оно предназначено для начального знакомства с предметом. Весь материал разделен на две главы по виду функций, входящих в уравнение или неравенство (показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы). Такое расположение материала должно облегчить работу учителя при подготовке к проведению занятий.

Последний параграф пособия посвящён решению задач с параметрами, прелагавшимися на ЕГЭ в 2002 - 2003 годах.

Если в уравнении или неравенстве некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются параметрами, а уравнение или неравенство параметрическим.

Значения параметров и искомых величин в пособии предполагаются действительными.

Решить уравнение или неравенство с параметрами означает:

1) определить, при каких значениях параметров существуют решения;

2) для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующее множество решений.

Существуют другие формы условий задач с параметрами – исследовать уравнение, определить количество решений, найти положительные решения и др.

Список принятых обозначений

R – множество всех действительных чисел,

$[a; b]$ – замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b, $a < b$,

$(a; b)$ – открытый промежуток (интервал) с началом a и концом b, $a < b$,

$(a; b]$, $[a; b)$ – полуинтервалы с началом a и концом b, $a < b$,

$(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$ – бесконечные промежутки,

$(-\infty; +\infty)$ – вся числовая ось,

$\Rightarrow$ – знак следования,

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности (эквивалентности),

$\in$ – знак принадлежности,

$\subset$ – знак включения,

$\cup$ – знак объединения множеств,

$\cap$ – знак пересечения множеств,

$\emptyset$ – пустое множество,

f – функция,

$f(x)$ - значение функции в точке x,

D – дискриминант квадратного трехчлена,

x_0 – абсцисса вершины параболы,

$D(f)$ – область определения функции f,

$E(f)$ – множество значений функции f,

$|x|$ – абсолютная величина (модуль) числа x,

ОДЗ – область допустимых значений,

$\{$ – знак системы,

$[$ – знак совокупности,

$\{x\}$ – число x - элемент множества.

Глава I
Показательные уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств

§1. Решение уравнений

Приведем некоторые эквивалентности, используемые при решении показательных уравнений.

1. Уравнение $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$ при $h(x) > 0$ равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} h(x) = 1 \\ x \in D(f) \cap D(g) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ h(x) > 0,\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

2. В частном случае $(h(x) = a)$ уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a > 0$, равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} a = 1 \\ x \in D(f) \cap D(g) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ a > 0,\ a \neq 1. \end{cases}$$

3. Уравнение $a^{f(x)} = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, равносильно уравнению $f(x) = \log_a b$.

В дальнейшем во всех примерах, содержащих выражение $a^{f(x)}$, предполагаем $a > 0$. Случай $a = 1$ рассматриваем отдельно.

Примеры. Решить уравнения.

1) $25^x + a^2(a-1)5^x - a^5 = 0$, **2)** $2^{2x} - (2a+1)\cdot 2^x + a^2 + a = 0$,

3) $144^{-|2x-1|} - 2\cdot 12^{-|2x-1|} + a = 0$,

4) $a^{2x-4} + 3a^{x-2} + 4\sqrt{a^{2x-4} + 3a^{x-2} - 6} = 18$,

5) $a^x - a^{-x} = 2c\ (c > 0)$, **6)** $a^{\frac{2}{x}} - 5a^{\frac{1}{x}} + 4 = 0$, **7)** $a^{4x} + a^{2x} = a^{6x}$,

8) $3\cdot 4^{x-2} + 27 = a + a\cdot 4^{x-2}$, **9)** $a^{2x+1} - 3a^{2x} - 4a^{2x-1} = b - 1$,

10) $a^{x+1} = b^{3-x}$, **11)** $a^{\frac{9}{x^2-1}} \cdot a^{\frac{-3}{x+1}} = a^{\frac{2}{x-1}}$,

12) $\dfrac{2^x+3}{2^x-2} + \dfrac{2^x+7}{2^x-4} = \dfrac{2a}{4^x - 6\cdot 2^x + 8}$,

13) $\sqrt{2a^{x-3}+5} + \sqrt{a^{x-3}-1} = 4$.

Решение.

1) Пусть $5^x = t$, тогда уравнение примет вид

$$t^2 + a^2(a-1)t - a^5 = 0,$$

корни которого $t_1 = -a^3$, $t_2 = a^2$. Так как $5^x > 0$, то уравнение $5^x = -a^3$ имеет решение $x = 3\log_5(-a)$ при $a < 0$, а уравнение $5^x = a^2$ имеет решение $x = 2\log_5|a|$ при $a \neq 0$.

Ответ: $x_1 = 3\log_5(-a)$, $x_2 = 2\log_5(-a)$ при $a \in (-\infty;\ 0)$; $\emptyset$ при $a = 0$; $x = 2\log_5 a$ при $a \in (0;\ +\infty)$.

2) После замены $2^x = t$ получаем квадратное уравнение
$$t^2 - (2a+1)t + a(a+1) = 0,$$
корни которого $t_1 = a$, $t_2 = a+1$.

1. $2^x = a$. Если $a \le 0$, то решений нет, при $a > 0$ $x = \log_2 a$.

2. $2^x = a+1$. Если $a \le -1$, то решений нет, при $a > -1$ $x = \log_2(a+1)$.

Ответ: $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ -1]$; $x = \log_2(a+1)$ при $a \in (-1; 0]$; $x_1 = \log_2 a$, $x_2 = \log_2(a+1)$ при $a \in (0;\ +\infty)$.

3) Обозначая $12^{-|2x-1|}$ за t, исходное уравнение приведем к виду $t^2 - 2t + a = 0$, корни которого $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$ $(a \le 1)$. При $a = 1$ $t_1 = t_2 = 1$, а уравнение
$$12^{-|2x-1|} = 1 \Leftrightarrow |2x-1| = 0$$
имеет решение $x = \frac{1}{2}$. Так как $0 < t = 12^{-|2x-1|} \le 1$, то $t_2 = 1 + \sqrt{1-a} \notin (0; 1]$ при $a < 1$. Решая неравенство $0 < t_1 = 1 - \sqrt{1-a} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{1-a} < 1 \Leftrightarrow 0 < a \le 1$, получим, что $12^{-|2x-1|} = 1 - \sqrt{1-a} \Leftrightarrow -|2x-1| = \log_{12}(1 - \sqrt{1-a})$, откуда $x = \frac{1}{2}(1 \pm \log_{12}(1 - \sqrt{1-a}))$ при $0 < a \le 1$.

Ответ: $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ 0] \cup (1;\ +\infty)$; $x = \frac{1}{2}(1 \pm \log_{12}(1 - \sqrt{1-a}))$ при $a \in (0;\ 1)$; $x = \frac{1}{2}$ при $a = 1$.

4) Пусть $y = \sqrt{a^{2x-4} + 3a^{x-2} - 6}$. Первоначальное уравнение примет вид $y^2 + 4y - 12 = 0$, корни которого $y_1 = 2$, $y_2 = -6$. Так как $y \ge 0$, то $y_2 = -6 \notin [0;\ +\infty)$. Решим теперь уравнение
$$\sqrt{a^{2x-4} + 3a^{x-2} - 6} = 2 \Leftrightarrow a^{2x-4} + 3a^{x-2} - 10 = 0.$$
Снова введём обозначение $a^{x-2} = t > 0$ и преобразуем уравнение к виду $t^2 + 3t - 10 = 0$. Условию $t > 0$ удовлетворяет только один корень $t_1 = 2$ $(t_2 = -5 \notin (0;\ +\infty))$. Решая уравнение $a^{x-2} = 2$, получим $x = 2 + \log_a 2$ $(a \ne 1)$, $\emptyset$ при $a = 1$.

Ответ: $x = 2 + \log_a 2$ при $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$; $\emptyset$ при $a = 1$.

5) Путем замены $a^x = t$ приведём уравнение к квадратному $t^2 - 2ct - 1 = 0$, корни которого $t_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2+1}$. Решим уравнение $a^x = c + \sqrt{c^2+1}$. Если $a = 1$, то при $c = 0$ $x \in R$, при $c \ne 0$ уравнение решений не имеет. В случае $a \in (0; 1) \cup (1;\ +\infty)$ $x = \log_a(c + \sqrt{c^2+1})$. Уравнение $a^x = c - \sqrt{c^2+1}$ решений не имеет.

Ответ: $x \in R$ при $a = 1$, $c = 0$; $\emptyset$ при $a = 1$, $c \ne 0$; $x = \log_a(c + \sqrt{c^2+1})$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

6) $a^{\frac{2}{x}} - 5a^{\frac{1}{x}} + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^{\frac{1}{x}} = 1 \\ a^{\frac{1}{x}} = 4. \end{array} \right.$ (1), (2)

При $a = 1$ множество решений уравнения (1) $x \in R$, $x \neq 0$. При $a \neq 1$ уравнение (1) решений не имеет. Решая уравнение (2), получим $\frac{1}{x} = \log_a 4$ $(a \neq 1)$, откуда $x = \log_4 a$. При $a = 1$ уравнение (2) решений не имеет.

Ответ: $x = \log_4 a$ при $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$; $x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ при $a = 1$.

7) После замены $a^{2x} = t$ получаем кубическое уравнение

$$t^2 + t = t^3 \Leftrightarrow t(t^2 - t - 1) = 0,$$

корни которого $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) < 0$, $t_3 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) > 0$. Уравнение $a^{2x} = t$ имеет решение только при $t > 0$, поэтому исходное уравнение имеет единственное решение $a^{2x} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \log_a \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Ответ: $x = \frac{1}{2} \log_a \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ при $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$; $\emptyset$ при $a = 1$.

8) $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2} \Leftrightarrow 4^{x-2}(3 - a) = a - 27$.

При $a \neq 3$ уравнение $4^{x-2} = \dfrac{a - 27}{3 - a}$ имеет решение $x = 2 + \log_4 \dfrac{a - 27}{3 - a}$ при условии $\dfrac{a - 27}{3 - a} > 0 \Leftrightarrow a \in (3;\ 27)$.

Ответ: $x = 2 + \log_4 \dfrac{a - 27}{3 - a}$ при $a \in (3;\ 27)$; $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ 3] \cup [27;\ +\infty)$.

9) $a^{2x+1} - 3a^{2x} - 4a^{2x-1} = b - 1 \Leftrightarrow a^{2x-1} \cdot (a^2 - 3a - 4) = b - 1 \Leftrightarrow a^{2x-1} \cdot (a - 4)(a + 1) = b - 1$.

Рассмотрим несколько случаев.

1. $a = 4$; $b = 1$, $x \in R$. 2. $a = 4$, $b \neq 1$, $\emptyset$.
3. $a = 1$, $b = -5$, $x \in \mathrm{R}$. 4. $a = 1$, $b \neq -5$, $\emptyset$.
5. $a \neq 1$, $a \neq 4$. Уравнение

$a^{2x-1} = \dfrac{b - 1}{(a - 4)(a + 1)}$ имеет решение $x = \dfrac{1}{2} \log_a \dfrac{a(b - 1)}{(a - 4)(a + 1)}$

при условии $\dfrac{b - 1}{a - 4} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b > 1,\ a > 4 \\ b < 1,\ 0 < a < 4. \end{array} \right.$

Ответ: $x \in R$ при 1) $a = 4$, $b = 1$, 2) $a = 1$, $b = -5$; $\emptyset$ при 1) $a = 4$, $b \neq 1$, 2) $a = 1$, $b \neq -5$, 3) $0 < a < 4$, $b > 1$, 4) $a > 4$, $b < 1$; $x = \dfrac{1}{2} \log_a \dfrac{a(b - 1)}{(a - 4)(a + 1)}$ при 1) $0 < a < 4$, $b < 1$; 2) $a > 4$, $b > 1$.

10) Исходное уравнение определено при $a>0$, $b>0$. Если $a=b=1$, то решением уравнения является любое действительное число. Если $a\neq 1$, $b=1$, то $a^{x+1}=1$ и $x=-1$. Если $a=1$, $b\neq 1$, то $b^{3-x}=1$, откуда $x=3$. При $a\neq 1$ и $b\neq 1$ имеем $(ab)^x=\frac{b^3}{a}$ $\Leftrightarrow$ $x=\log_{ab}\frac{b^3}{a}$ $(ab\neq 1)$. Если же $ab=1$, то $(ab)^x=\frac{b^3}{a}$ $\Leftrightarrow$ $1=\frac{b^3}{a}$ $\Leftrightarrow$ $b^4=1$, $b=1$, что противоречит предположению $b\neq 1$.

Ответ: $x\in R$ при $a=b=1$; $x=3$ при $a=1$, $b\neq 1$; $x=-1$ при $a\neq 1$, $b=1$; $x=\log_{ab}\frac{b^3}{a}$ при $a\neq 1$, $b\neq 1$, $ab\neq 1$; $\emptyset$ при $ab=1$, $a\neq 1$.

11) Исходное уравнение имеет смысл при $x\neq\pm 1$ и $a>0$. После преобразований получим уравнение $a^{\frac{12-3x}{x^2-1}}=a^{\frac{2}{x-1}}$. При $a=1$ $x\in(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. При $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$ имеем $\frac{12-3x}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{10-5x}{x^2-1}=0$, откуда $x=2$.

Ответ: $x\in\mathrm{R}\setminus\{-1;\ 1\}$ при $a=1$;
$x=2$ при $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

12) Полагая $2^x=t$, получим

$$\frac{t+3}{t-2}+\frac{t+7}{t-4}=\frac{2a}{t^2-6t+8}\ \Leftrightarrow\ \frac{2\cdot(t^2+2t-13-a)}{(t-2)\cdot(t-4)}=0,$$

откуда $t_{1,2}=-1\pm\sqrt{14+a}$, $t\neq 2$, $t\neq 4$. Так как $2^x>0$, то уравнение $2^x=-1-\sqrt{14+a}$ решений не имеет. Уравнение $2^x=\sqrt{14+a}-1$ имеет решение $x=\log_2(\sqrt{14+a}-1)$ при условии $\sqrt{14+a}-1>0$, т.е. при $a>-13$. Остается исключить те значения a, при которых $t=2$ и $t=4$.

$$\sqrt{14+a}-1=2\ \Leftrightarrow\ \sqrt{14+a}=3\ \Leftrightarrow\ a=-5,$$
$$\sqrt{14+a}-1=4\ \Leftrightarrow\ \sqrt{14+a}=5\ \Leftrightarrow\ a=11.$$

Ответ: $\emptyset$ при $a\in(-\infty,-13]\cup\{-5\}\cup\{11\}$;
$x=\log_2(\sqrt{14+a}-1)$ при $a\in(-13;\ -5)\cup(-5;\ 11)\cup(11;\ +\infty)$.

13) После замены $a^{x-3}=t$ получим $\sqrt{2t+5}+\sqrt{t-1}=4$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2t+5+2\sqrt{2t+5}\sqrt{t-1}+t-1=16\\ t\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{2t+5}\sqrt{t-1}=12-3t\\ t\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2t+5)(t-1) = 144 - 72t + 9t^2 \\ 12 - 3t \geq 0 \\ t \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 84t + 164 = 0 \\ 1 \leq t \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = 82 \end{array} \right. \\ 1 \leq t \leq 4 \end{cases}, \text{ откуда } t = 2.$$

Уравнение $a^{x-3} = 2$ при $a = 1$ решений не имеет, а при $a > 0$, $a \neq 1$ имеет решение $x = 3 + \log_a 2$.

Ответ: $\emptyset$ при $a = 1$; $x = 3 + \log_a 2$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Упражнения.

Решить уравнения.

1) $4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0$, **2)** $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$,

3) $a^{2x}(a^{2x} + 1) = a(a^{3x} + a^x)$, **4)** $a^{2x-3} - a^{2x-2} + a^{2x} = b$,

5) $a^{2x+1} = b^{3x+2}$, **6)** $\dfrac{a^{-(x+0,5)}}{\sqrt{a}} = a \cdot a^{-2x}$,

7) $\dfrac{3^x + 5}{3^x - 3} + \dfrac{3^x - 7}{3^x + 1} = \dfrac{2a}{9^x - 2 \cdot 3^x - 3}$,

8) $a^{\frac{3}{x+1}} \cdot a^{\frac{2}{x+1}} = \dfrac{1}{a^5} \cdot a^{\frac{5x}{2}}$.

§2. Условия существования решений

Очень часто в задачах требуется установить, при каких a уравнение имеет решения или не имеет их. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. При каких a уравнение имеет решения ?

1) $4^x + a \cdot 2^x = 1$, **2)** $25^x - (a-4) \cdot 5^x - 2a^2 + 10a - 12 = 0$, **3)** $2^{|x|+a} - 2^{|x|} = 5$, **4)** $2^x + 2^{2-x} = a$, **5)** $|2^x - a| = 3$, **6)** $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$, **7)** $(a-1)4^x - 4 \cdot 2^x + (a+2) = 0$.

Решение.

1) После замены $2^x = t$ получим квадратное уравнение $t^2 + at - 1 = 0$. Так как свободный член отрицателен, то уравнение при любом a имеет корни противоположных знаков, следовательно, первоначальное уравнение при любом a имеет единственное решение $x = \log_2 t_1$, где t_1 – положительный корень квадратного уравнения.

Ответ : $a \in (-\infty;\ +\infty)$.

2) Обозначим 5^x через t, получим квадратное уравнение $t^2 - (a-4)t + (2a-6)(2-a) = 0$, корни которого $t_1 = 2a - 6$, $t_2 = 2 - a$. Так как уравнение $5^x = t$ имеет решение при $t > 0$, то искомые значения a найдем из совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a - 6 > 0 \\ 2 - a > 0, \end{array}\right.$ откуда $a \in (-\infty;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$.

Ответ : $a \in (-\infty;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$.

3) $2^{|x|+a} - 2^{|x|} = 5 \Leftrightarrow 2^{|x|}(2^a - 1) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} = \dfrac{5}{2^a - 1} \\ 2^a - 1 \neq 0. \end{cases}$

Так как $2^{|x|} \geq 1$ при любом $x \in \mathrm{R}$, то исходное уравнение будет иметь решения при условии $\dfrac{5}{2^a - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a - 1 > 0 \\ 5 \geq 2^a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $1 < 2^a \leq 6 \Leftrightarrow 0 < a \leq \log_2 6$.

Ответ : $a \in (0;\ \log_2 6]$.

4) Воспользуемся неравенством $b + c \geq 2\sqrt{bc}$ $(b \geq 0,\ c \geq 0)$. Имеем $2^x + 2^{2-x} = 2^x + \frac{4}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{4}{2^x}} = 4$. Множество значений левой части уравнения – промежуток $[4; +\infty)$, следовательно, уравнение имеет решения при $a \geq 4$.

Замечание. Приводя исходное уравнение к квадратному $t^2 - at + 4 = 0$, где $t = 2^x$, искомые значения a можно получить из условий $\begin{cases} D \ge 0 \\ 0 < t_1 \le t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 16 \ge 0 \\ a > 0, \end{cases}$ откуда $a \ge 4$.

Ответ : $a \in [4;\ +\infty)$.

5) $|2^x - a| = 3 \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} 2^x = a + 3 \\ 2^x = a - 3 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x = \log_2(a+3),\ a > -3 \\ x = \log_2(a-3),\ a > 3. \end{array} \right.$

При $a \in (-3;\ 3]$ уравнение имеет одно решение $x = \log_2(a+3)$, при $a \in (3; +\infty)$ уравнение имеет два решения $x_1 = \log_2(a+3)$ и $x_2 = \log_2(a-3)$.

Ответ : $a \in (-3;\ +\infty)$.

6) Обозначая $t = 3^{-|x-2|}$, получим уравнение $f(t) = 0$, где $f(t) = t^2 - 4t - a$. Корни уравнения $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+a}$ $(a \ge -4)$. Так как $0 < t = 3^{-|x-2|} \le 1$ для любых x, то искомые значения a можно найти из условия $0 < t_{1,2} \le 1$. Ясно, что $t_1 = 2 + \sqrt{4+a} \ge 2$, поэтому $t_1 \notin (0; 1]$. Решая неравенство $0 < t_2 \le 1 \ \Leftrightarrow \ 0 < 2 - \sqrt{4+a} \le 1 \ \Leftrightarrow$ $1 \le \sqrt{4+a} < 2 \ \Leftrightarrow \ 1 \le 4 + a < 4$, получаем $a \in [-3;\ 0)$.

Замечание. Так как абсцисса вершины параболы $t_0 = 2$, то на промежутке $t \in (-\infty;\ 2]$ f убывает, и значения a можно было найти из системы неравенств $\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a > 0 \\ 1 - 4 - a \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $-3 \le a < 0$.

Ответ : $a \in [-3;\ 0)$.

7) Полагая $2^x = t$, уравнение

$$(a-1)4^x - 4 \cdot 2^x + (a+2) = 0 \qquad (1)$$

приводим к виду $f(t) = 0$, где $f(t) = (a-1)t^2 - 4t + (a+2)$. Уравнение (1) будет иметь хотя бы одно решение, если уравнение $f(t) = 0$ будет иметь хотя бы одно положительное решение. Это возможно в следующих случаях:

1. $a = 1$. Уравнение $f(t) = 0$ имеет единственное решение $t = \frac{3}{4} > 0$.

2. Корни уравнения $f(t) = 0$ имеют противоположные знаки. Значения a находим из условия $(a-1)f(0) < 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+2) < 0$, откуда $a \in (-2;\ 1)$. Если один из корней равен нулю (при $a = -2$), то второй корень $t = -\frac{4}{3}$, т.е. значение $a = -2$ условиям задачи не удовлетворяет.

3. Оба корня уравнения положительны. Значения a находим из системы

$$\begin{cases} t_0 > 0 \\ \frac{1}{4}D > 0 \\ (a-1)f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a-1} > 0 \\ 4-(a+2)(a-1) > 0 \\ (a-1)(a+2) > 0 \end{cases}, \text{ откуда } a \in (1;\ 2).$$

4. Корни уравнения совпадают. Уравнение $D = 0$ имеет корни $a = -3$ и $a = 2$. При $a = -3$ $t = -\frac{1}{2} < 0$, а при $a = 2$ $t = 2 > 0$.

Объединяя найденные значения a, получаем

Ответ : $a \in (-2;\ 2]$.

Пример 2. При каких a уравнение не имеет решений?
1) $a \cdot 2^{-x} = a^2 - 9$, **2)** $49^x - 2a \cdot 7^x + a^2 - 1 = 0$,
3) $4^x + (a^2+5) \cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$, **4)** $a \cdot 4^{x+1} - (3a+1) \cdot 2^x + a = 0$.

Решение.

1) Если $a = 0$, то уравнение решений не имеет. При $a \neq 0$ уравнение преобразуем к виду $2^{-x} = \frac{a^2-9}{a}$. Так как $E(2^{-x}) = (0;\ +\infty)$, то последнее уравнение не имеет решений, если $\frac{a^2-9}{a} \leq 0$. Решая это неравенство, получим $a \in (-\infty;\ -3] \cup (0;\ 3]$. Объединяя все найденные значения a, получим

Ответ : $a \in (-\infty;\ -3] \cup [0;\ 3]$.

2) Исходное уравнение путем замены $7^x = t$ приводим к квадратному $t^2 - 2at + a^2 - 1 = 0$, корни которого $t_1 = a-1$, $t_2 = a+1$. Уравнение $7^x = t$ не имеет решений, если $t \leq 0$. Искомые значения a находим из системы $\begin{cases} t_1 \leq 0 \\ t_2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 \leq 0 \\ a+1 \leq 0, \end{cases}$ откуда $a \leq -1$.

Ответ : $a \in (-\infty;\ -1]$.

3) Положим $2^x = t$, тогда уравнение

$$4^x + (a^2+5) \cdot 2^x + 9 - a^2 = 0 \tag{2}$$

примет вид $f(t) = 0$, где $f(t) = t^2 + (a^2+5)t + 9 - a^2$. Уравнение (2) не имеет решений, если уравнение $f(t) = 0$ не имеет положительных решений. Так как $t_0 = -\frac{1}{2}(a^2+5) < 0$, то на промежутке $[-\frac{1}{2}(a^2+5);\ +\infty)$ f возрастает, поэтому достаточно потребовать выполнения неравенства $f(0) \geq 0 \Leftrightarrow 9 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq 3$.

Ответ : $a \in [-3;\ 3]$.

4) Пусть $2^x = t$. Уравнение

$$a \cdot 4^{x+1} - (3a+1)2^x + a = 0 \tag{3}$$

принимает вид $f(t) = 0$, где $f(t) = 4at^2 - (3a+1)t + a$. Уравнение (3) не будет иметь решений, если уравнение $f(t) = 0$ не будет иметь положительных решений.

Рассмотрим следующие случаи:

1. $a = 0$. Уравнение $f(t) = 0$ имеет единственное решение $t = 0$, следовательно, $a = 0$ удовлетворяет условиям задачи.

2. $D < 0$. Решая неравенство $(3a+1)^2 - 16a^2 < 0 \Leftrightarrow 7a^2 - 6a - 1 > 0$, получаем $a \in (-\infty;\ -\frac{1}{7}) \cup (1;\ +\infty)$. При $a = -\frac{1}{7}$ $t_1 = t_2 = -\frac{1}{2} < 0$, при $a = 1$ $t_1 = t_2 = \frac{1}{2} > 0$. Условиям задачи удовлетворяют значения $a \in (-\infty;\ -\frac{1}{7}] \cup (1;\ +\infty)$.

3. Оба корня уравнения $f(t) = 0$ отрицательны. Значения a найдем из системы

$$\begin{cases} t_0 < 0 \\ D > 0 \\ 4af(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3a+1}{8a} < 0 \\ (3a+1)^2 - 16a^2 > 0 \\ 4a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\frac{1}{3}; 0) \\ a \in (-\frac{1}{7};\ 1) \\ a \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty), \end{cases}$$

откуда $a \in (-\frac{1}{7};\ 0)$.

4. Один из корней уравнения $f(t) = 0$ равен 0, второй отрицателен. Подставляя в уравнение $f(t) = 0$ $t = 0$, получим значение $a = 0$, которое исследовано ранее.

Объединяя найденные значения a, получим

Ответ : $a \in (-\infty;\ 0] \cup (\frac{1}{7};\ +\infty)$.

Замечание. В отличие от предыдущего примера t_0 может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому удобнее применить другой способ решения.

Упражнения.

1. При каких a уравнение имеет решения?

1) $2^{2x} - (a-3)2^x - 3a = 0$, **2**) $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 = 0$,
3) $(a-1) \cdot 4^x - 4 \cdot 6^x + (a+2) \cdot 9^x = 0$, **4**) $9^x + 2a \cdot 3^x - 4 = 0$,
5) $5^{2x} - (a-2)5^x - 2a = 0$, **6**) $x^2 - (2^a - 1)x - 3(4^{a-1} - 2^{a-2}) = 0$.

2. При каких a уравнение не имеет решений?

1) $(0,2)^x = \dfrac{2a+3}{5-a}$, **2**) $9^x + (a^2+2)3^x + a^2 - 4 = 0$,
3) $25^x - (2a-1)5^x + a^2 - a - 2 = 0$, **4**) $(10-a)5^{2x+1} - 2 \cdot 5^{x+1} + 6 - a = 0$,
5) $(a-4)9^x + (a+1)3^x + 2a - 1 = 0$.

§3. Корни уравнения

Рассмотрим несколько примеров на определение значений параметра, при которых

1) уравнение имеет единственное решение, два решения, только положительные или отрицательные решения;

2) два уравнения равносильны.

Пример 1. При каких a уравнение имеет единственное решение?

1) $a \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$, 2) $a \cdot 4^x - 5 \cdot 4^{-x} = 5$,

3) $3^{2x+2} - 6^{x+1} + a \cdot 4^x = 0$, 4) $4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$,

5) $4^x - (5a-3)2^x + 4a^2 - 3a = 0$, 6) $2^{(a-1)x^2+2(a+3)x+a} = \frac{1}{4}$.

Решение.

1) Вводя переменную $2^x = t$, получим уравнение $f(t) = 0$, где $f(t) = at^2 - 5t + 1$.

1. При $a = 0$ линейное уравнение $-5t + 1 = 0$ имеет решение $t = \frac{1}{5} > 0$, поэтому исходное уравнение имеет единственное решение.

2. Если $D = 0$, то $a = \frac{25}{4}$. Уравнение $f(t) = 0$ имеет единственное положительное решение $t = \frac{2}{5}$, следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение.

3. Один корень уравнения $f(t) = 0$ положителен, второй отрицателен. $t_1 t_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < 0 \Leftrightarrow a < 0$.

4. Случай $t_1 = 0$, $t_2 > 0$ невозможен, так как ни при каком a уравнение $f(t) = 0$ не может иметь нулевое решение. Объединяя найденные значения a, получим

Ответ : $a \in (-\infty;\ 0] \cup \{\frac{25}{4}\}$.

2) После замены переменной $4^x = t$ получим уравнение $f(t) = 0$, где $f(t) = at^2 - 5t - 5$.

1. При $a = 0$ линейное уравнение $-5t - 5 = 0$ имеет решение $t = -1 < 0$, следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

2. Если $D = 0$, то $a = -\frac{5}{4}$. Квадратное уравнение имеет единственное решение $t = -\frac{1}{2} < 0$, поэтому исходное уравнение решений не имеет.

3. $af(0) < 0 \Leftrightarrow -5a < 0 \Leftrightarrow a > 0$. При этих значениях a корни уравнения $f(t) = 0$ имеют противоположные знаки.

4. Случай $t_1 = 0$, $t_2 > 0$ невозможен.

Ответ : $a \in (0;\ +\infty)$.

3) Разделив левую и правую части уравнения на 4^{x+1}, получим квадратное уравнение

$$t^2 - t + \frac{a}{4} = 0, \qquad (1)$$

где $t = (\frac{3}{2})^{x+1}$. Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если уравнение (1) имеет только один положительный корень. Это выполняется в следующих случаях.

1. $D = 0 \Leftrightarrow 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1,\ t = \frac{1}{2} > 0.$

2. $t_1 \cdot t_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{a}{4} < 0 \Leftrightarrow a < 0.$

3. Один корень уравнения (1) равен 0, второй положителен. При $a = 0$ $t_1 = 0,\ t_2 = 1 > 0.$

Ответ : $a \in (-\infty;\ 0] \cup \{1\}.$

4) Пусть $2^x = t$, тогда уравнение

$$4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0 \qquad (2)$$

примет вид

$$t^2 - (a+3)t + 4(a-1) = 0, \qquad (3)$$

корни которого $t_1 = 4,\ t_2 = a - 1$. При $a = 5$ уравнение (3) имеет единственное решение $t = 4$, откуда $x = 2$ – единственное решение уравнения (2). Кроме того, уравнение (2) будет иметь одно решение $x = 2$ при $a \le 1$, так как в этом случае уравнение $2^x = a - 1$ решений не имеет.

Ответ : $a \in (-\infty;\ 1] \cup \{5\}.$

5) Обозначая 2^x через t, получим уравнение

$$t^2 - (5a-3)t + a(4a-3) = 0, \qquad (4)$$

корни которого $t_1 = a,\ t_2 = 4a - 3.$

Так как $t = 2^x > 0$, то исходное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение (4) имеет единственное положительное решение. Рассмотрим возможные случаи.

1. $t_1 = t_2 \Leftrightarrow a = 4a - 3$, откуда $a = 1$ и $t_1 = t_2 = 1 > 0.$

2. Корни уравнения (4) имеют противоположные знаки. $t_1 \cdot t_2 < 0 \Leftrightarrow a(4a-3) < 0$, откуда $a \in (0;\ \frac{3}{4}).$

3. Один из корней уравнения (4) равен нулю, а второй положителен. Если $t_1 = a = 0$, то $t_2 = -3 < 0.$

Если же $t_2 = 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$, то $t_1 = a = \frac{3}{4} > 0.$

Объединяя найденные значения a, получим

Ответ : $a \in (0;\ \frac{3}{4}] \cup \{1\}.$

6) Исходное уравнение равносильно уравнению $(a-1)x^2 + 2(a+3)x + a = -2$. Последнее уравнение может иметь единственное решение в двух случаях.

1. Коэффициент при x^2 равен нулю $(a = 1)$. Линейное уравнение $8x + 3 = 0$ имеет единственное решение.

2. Квадратное уравнение имеет единственное решение в случае $\frac{1}{4}D = 0 \Leftrightarrow (a+3)^2 - (a+2)(a-1) = 0 \Leftrightarrow 5a + 11 = 0$, откуда $a = -2,2$.

Ответ : $a \in \{-2,2;\ 1\}$.

Пример 2. При каких a уравнение

$$9^x - 2(3a-2)3^x + 5a^2 - 4a = 0 \qquad (5)$$

имеет два различных решения ?

Решение. Уравнение $f(t) = 0$, где $f(t) = t^2 - 2(3a-2)t + 5a^2 - 4a$, $t = 3^x$ имеет корни $t_1 = a$, $t_2 = 5a - 4$. Уравнение (5) имеет два различных решения тогда и только тогда, когда уравнение $f(t) = 0$ имеет два различных положительных корня.

Решая систему

$$\begin{cases} t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \\ t_1 \neq t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a > \frac{4}{5} \\ a \neq 5a - 4, \end{cases}$$ получаем $a \in (\frac{4}{5};\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Замечание. Значения a можно получить, не находя корни t_1 и t_2, из системы

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ \frac{1}{4}D > 0 \\ t_0 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(5a-4) > 0 \\ (3a-2)^2 - 5a^2 + 4a > 0 \\ 3a - 2 > 0, \end{cases}$$

откуда $a \in (\frac{4}{5};\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Ответ : $a \in (\frac{4}{5};\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Пример 3. При каких a уравнение $8^x = \dfrac{3a-2}{4-a}$ имеет только положительные корни ?

Решение. По свойству показательной функции с основанием, большим единицы, имеем $x > 0 \Leftrightarrow 8^x > 1 \Leftrightarrow \dfrac{3a-2}{4-a} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{4a-6}{4-a} > 0$, откуда $a \in (\frac{3}{2};\ 4)$.

Ответ : $a \in (\frac{3}{2};\ 4)$.

Пример 4. При каких a равносильны уравнения
$4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16$ и $|a-9|3^{x-2} + a \cdot 9^{x-1} = 1$? (6), (7)

Решение. Найдем корни уравнения (6).

$4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} + 16 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x - 16 = 0 \Leftrightarrow$ $2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 4 = 0$. После замены $2^x = t$ получаем квадратное уравнение $t^2 + 3t - 4 = 0$, корни которого $t_1 = -4$, $t_2 = 1$. Так как уравнение $2^x = -4$ решений не имеет, то уравнение (6) имеет единственное решение $(2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0)$.

Подставляя $x = 0$ в уравнение (7), получим $\frac{1}{9}|a-9| + \frac{1}{9}a = 1 \Leftrightarrow$ $|a-9| = -(a-9)$, откуда $a \leq 9$. Исследуем полученные значения a.

При $a \leq 9$ уравнение (7) принимает вид $ay^2 + (9-a)y - 9 = 0$, где $y = 3^x$.

Если $a = 0$, то $y = 1$, $3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Уравнение (7) имеет единственное решение $x = 0$, следовательно, при $a = 0$ уравнения равносильны.

При $a \neq 0$ корни квадратного уравнения $ay^2 + (9-a)y - 9 = 0$ $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{9}{a}$. Если $a \in (0;\ 9]$, то уравнение $3^x = -\frac{9}{a}$ решений не имеет, множества решений уравнений (6) и (7) совпадают $(x = 0)$, уравнения равносильны. При $a \in (-\infty;\ -9) \cup (-9;\ 0)$ уравнение (7) кроме $x = 0$ имеет решение $3^x = -\frac{9}{a} \Leftrightarrow x = \log_3(-\frac{9}{a})$, поэтому уравнения не равносильны. При $a = -9$ $y_1 = y_2 = 1$, уравнение (7) имеет единственное решение $x = 0$ и уравнения (6) и (7) равносильны.

Ответ : $a \in \{-9\} \cup [0;\ 9]$.

Упражнения.

1. При каких a уравнение имеет единственное решение?

1) $5^{2x} - 10^x + 4^{x-1}(a-2) = 0$,
2) $a \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{-x} = 2$,
3) $7^{2x} - 2 \cdot 21^x + (2a-1) \cdot 9^x = 0$,
4) $a \cdot 5^x - 6 \cdot 5^{-x} = 4$,
5) $25^x - 2 \cdot 10^x + (2a+3) \cdot 4^x = 0$,
6) $2^{2x} - a \cdot 2^x - 2a = 0$,
7) $9^x - 3^{x+1} - a^2 + 5a - 4 = 0$,
8) $a(2^x + 2^{-x}) = 5$,
9) $4^x - a \cdot 2^{x+1} - 3a^2 + 4a = 0$,
10) $3^{(a+1)x^2 - 2(a-2)x + a} = 27$,
11) $2^{ax^2 - 4x + 2a} = \frac{1}{(\sqrt{2})^{-4}}$,
12) $3^{ax^2 + 2x - a} = \frac{1}{(\sqrt{3})^{-4}}$.

2. При каких a уравнение $(a-1)3^{2x} - (2a-1)3^x - 1 = 0$ имеет два различных корня?

3. При каких a уравнение $(0,2)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{2a+3}{5-a}$ имеет отрицательные корни?

4. Каковы знаки корней уравнения
$x^2 - x(a \cdot 3^a)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(3^{a+1} + a - 3) = 0$ при различных значениях a ?

5. При каких a число (-1) является корнем уравнения
$\sqrt{a \cdot 5^{-x} + 56} = 2 \cdot 5^{-x} + a$?

§4. Показательные неравенства

Решение простейших показательных неравенств основано на свойстве монотонности степени:
$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ a > 1, \end{cases}$ $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Неравенство вида $f(a^x) > 0$ при помощи замены переменной $t = a^x$ сводится к решению системы неравенств $\begin{cases} f(t) > 0 \\ t > 0, \end{cases}$ а затем к решению соответствующих простейших показательных неравенств.

При решении нестрогого неравенства необходимо к множеству решений строгого неравенства присоединить корни соответствующего уравнения. Как и при решении уравнений во всех примерах, содержащих выражение $a^{f(x)}$, предполагаем $a > 0$. Случай $a = 1$ рассматриваем отдельно.

Пример 1. Решить неравенства

1) $9^{x+1} + 8a \cdot 3^x - a^2 > 0$, **2)** $2 \cdot 4^{x+1} + a \cdot 2^{x+1} - a^2 \le 0$,

3) $\dfrac{a^{2x} - 10}{a^x + 1} \le 3 - \dfrac{15}{a^x(a^x + 1)}$, **4)** $a^2 \cdot 2^x > a$,

5) $x^2 - 2x + 2^{|a|} > 0$, **6)** $a^{x+2} + 8a^{x-1} - \frac{4}{a} > a - 2$,

7) $|a^{2x} + a^{x+2} - 1| \ge 1$, **8)** $(a + 1) < (a + 2) \cdot 3^{\sqrt{x+1}}$,

9) $|3^x - 3^{-x}| < 3^a - 3^{-a}$, **10)** $a^2 \cdot 4^{x+1} - 33a \cdot 2^x + 8 > 0$,

11) $a^{2(1-x)} - 6a^{-2} - a^{-x} > 0$, **12)** $a^{x^2-x} < a^2$,

13) $\sqrt{2 - a^{x-3}} < a^{x-3}$.

Решение.

1) После замены переменной $3^x = t > 0$ придем к квадратному неравенству $9t^2 + 8at - a^2 > 0 \Leftrightarrow (9t - a)(t + a) > 0$. Рассмотрим три случая:

1. $a < 0$. Так как $9t - a > 0$, то решение неравенства $t > -a \Leftrightarrow 3^x > -a \Leftrightarrow x > \log_3(-a)$.

2. $a > 0$. В этом случае $t + a > 0$, поэтому решение неравентва $9t > a \Leftrightarrow 3^x > \frac{a}{9}$, откуда $x > \log_3 a - 2$.

3. При $a = 0$ первоначальное неравенство принимает вид $9^{x+1} > 0$, решением его является любое значение $x \in R$.

Ответ : $x \in (-\log_3(-a);\ +\infty)$ при $a < 0$; $x \in R$ при $a = 0$; $x \in (\log_3 a - 2;\ +\infty)$ при $a > 0$.

2) Как и в предыдущем случае, получим квадратное неравенство

$$8t^2 + 2at - a^2 \le 0 \;\Leftrightarrow\; (4t - a)(2t + a) \le 0, \qquad (1)$$

где $t = 2^x > 0$.

1. $a < 0$. Решения неравенства (1) $t \in [\frac{a}{4};\ -\frac{a}{2}]$, откуда $2^x \le -\frac{a}{2} \;\Leftrightarrow\; x \le \log_2(-a) - 1$.

2. $a > 0$. В этом случае решения неравенства (1) $t \in [-\frac{a}{2};\ \frac{a}{4}]$, а исходного $2^x \le \frac{a}{4} \;\Leftrightarrow\; x \le \log_2 a - 2$.

3. $a = 0$. Исходное неравенство $2 \cdot 4^{x+1} \le 0$ решений не имеет.

Ответ : $x \in (-\infty;\ \log_2(-a) - 1]$ при $a < 0$; $\emptyset$ при $a = 0$; $x \in (-\infty;\ \log_2 a - 2]$ при $a > 0$.

3) Обозначив $t = a^x$, получим $\frac{t^2 - 10}{t + 1} - 3 + \frac{15}{t(t+1)} \le 0 \;\Leftrightarrow$ $\frac{t^3 - 3t^2 - 13t + 15}{t(t+1)} \le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(t+3)(t-1)(t-5)}{t(t+1)} \le 0$, где $t > 0$. Решения неравенства $t \in [1;\ 5]$.

1. $0 < a < 1$. $1 \le a^x \le 5 \;\Leftrightarrow\; \log_a 5 \le x \le 0$.
2. $a > 1$. $1 \le a^x \le 5 \;\Leftrightarrow\; 0 \le x \le \log_a 5$.

Ответ : $x \in [\log_a 5;\ 0]$ при $0 < a < 1$; $x \in [0;\ \log_a 5]$ при $a > 1$; $x \in R$ при $a = 1$.

4) Рассмотрим три случая:

1. $a < 0$. Так как левая часть неравенства положительна, а правая отрицательна, то неравенство выполняется для любых $x \in R$.
2. $a = 0$. Решений нет.
3. $a > 0$. $a^2 2^x > a \;\Leftrightarrow\; 2^x > \frac{1}{a} \;\Leftrightarrow\; x > -\log_2 a$.

Ответ : $x \in R$ при $a < 0$; $\emptyset$ при $a = 0$; $x \in (-\log_2 a;\ +\infty)$ при $a > 0$.

5) Поскольку $2^{|a|} \ge 1$ при любом $a \in R$, то $x^2 - 2x + 2^{|a|} \ge x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \ge 0$. Отсюда следует, что если $2^{|a|} > 1 \Leftrightarrow a \ne 0$, то решением неравенства является любое значение $x \in R$. Если же $a = 0$, то $x = 1$ не является решением.

Ответ : $x \in R$ при $a \ne 0$; $x \in R \setminus \{1\}$ при $a = 0$.

6) $a^{x+2} + 8a^{x-1} - \frac{4}{a} > a - 2 \;\Leftrightarrow\; a^x(a^2 + \frac{8}{a}) > a + \frac{4}{a} - 2 \;\Leftrightarrow$ $a^x(a^3 + 8) > a^2 - 2a + 4 \;\Leftrightarrow\; a^x > \frac{1}{a+2}$.

1. $0 < a < 1$. $a^x > \frac{1}{a+2} \;\Leftrightarrow\; x < -\log_a(a+2)$.
2. $a > 1$. $a^x > \frac{1}{a+2} \;\Leftrightarrow\; x > -\log_a(a+2)$.

3. При $a=1$ $x \in R$.

Ответ : $x \in (-\infty;\ -\log_a(a+2))$ при $0<a<1$;
$x \in (-\log_a(a+2);\ +\infty)$ при $a>1$; $x \in R$ при $a=1$.

7) Введем замену $a^x = t$. Тогда

$$|t^2+a^2t-1| \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2+a^2t-1 \geq 1 \\ t^2+a^2t-1 \leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t^2+a^2t-2 \geq 0 & (2) \\ t^2+a^2t \leq 0. & (3) \end{array}\right.$$

Так как $a^x = t > 0$, то неравенство (3) решений не имеет. Решением неравенства (2) является объединение двух промежутков $(-\infty;\ t_1] \cup [t_2;\ +\infty)$, где t_1 и t_2 – корни квадратного трехчлена. Поскольку $t_1 \cdot t_2 = -2 < 0$, то $t_1 < 0 < t_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^4+8}-a^2)$. С учетом $t>0$ решения неравенства (2) $t \in [t_2;\ +\infty)$.

1. $0<a<1$. $a^x \geq t_2 \Leftrightarrow x \leq \log_a \frac{1}{2}(\sqrt{a^4+8}-a^2)$.
2. $a>1$. $a^x \geq t_2 \Leftrightarrow x \geq \log_a \frac{1}{2}(\sqrt{a^4+8}-a^2)$.
3. При $a=1$ $x \in R$.

Ответ : $x \in (-\infty;\ \log_a \frac{1}{2}(\sqrt{a^4+8}-a^2)]$ при $0<a<1$; $x \in [\log_a \frac{1}{2}(\sqrt{a^4+8}-a^2);\ +\infty)$ при $a>1$; $x \in R$ при $a=1$.

8) ОДЗ неравенства $x \in [-1;\ +\infty)$. Критические значения a находим из условий $a+1=0$ и $a+2=0$.

1. $a<-2$. Так как $a+2<0$, $a+1<0$ и $\frac{a+1}{a+2} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} < 0$, то $\log_3 \frac{a+1}{a+2} > 0$, следовательно $(a+1) < (a+2)3^{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x+1}} < \frac{a+1}{a+2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < \log_3 \frac{a+1}{a+2} \Leftrightarrow 0 \leq x+1 \leq \log_3^2 \frac{a+1}{a+2} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \log_3^2 \frac{a+1}{a+2} - 1$.

2. $-2 \leq a < -1$. Левая часть исходного неравенства отрицательна, правая – неотрицательна. Это означает, что неравенство выполняется при всех x из ОДЗ.

3. $a \geq -1$. $(a+1) < (a+2)3^{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x+1}} > \frac{a+1}{a+2}$.

Поскольку $3^{\sqrt{x+1}} \geq 3^0 = 1 > \frac{a+1}{a+2}$, то неравенство выполняется при всех x из ОДЗ.

Ответ : $x \in [-1;\ \log_3^2 \frac{a+1}{a+2} - 1)$ при $a \in (-\infty;\ -2)$; $x \in [-1;\ +\infty)$ при $a \in [-2;\ +\infty)$.

9) Если $3^a - 3^{-a} \leq 0 \Leftrightarrow 3^{2a} \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 0$, то неравенство решений не имеет.

Пусть $a>0$. Введем обозначения $3^x = t > 0$, $3^a = b > 1$. Поскольку функция $f(x) = |3^x - 3^{-x}|$ четная, то достаточно решить неравенство при $x \geq 0$ $(t = 3^x \geq 1)$. Имеем $|3^x - 3^{-x}| < 3^a - 3^{-a} \Leftrightarrow$

$\dfrac{t^2-1}{t} < \dfrac{b^2-1}{b} \Leftrightarrow bt^2 - t(b^2-1) - b < 0 \Leftrightarrow b(t-b)(t+\frac{1}{b}) < 0 \Leftrightarrow$ $-\frac{1}{b} < t < b$, откуда $0 \le x < a$. В случае $x < 0$ множество решений $x \in (-a;\ 0)$.

Ответ : $\emptyset$ при $a \le 0$; $x \in (-a;\ a)$ при $a > 0$.

10) При $a \le 0$ левая часть неравенства положительна при любом $x \in R$.

Пусть $a > 0$. Введем обозначение $t = 2^x \cdot a$, получим квадратное неравенство $4t^2 - 33t + 8 > 0$, решения которого $t \in (-\infty;\ \frac{1}{4}) \cup (8;\ +\infty)$.

Множество решений первоначального неравенства найдем из совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 2^x \cdot a < \frac{1}{4} \\ 2^x \cdot a > 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \log_2 \frac{1}{4a} \\ x > \log_2 \frac{8}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 - \log_2 a \\ x > 3 - \log_2 a. \end{array}\right.$$

Ответ : $x \in R$ при $a \le 0$; $x \in (-\infty;\ -2-\log_2 a) \cup (3-\log_2 a;\ +\infty)$ при $a > 0$.

11) Домножим левую и правую части неравенства на a^2, получим $a^{2(2-x)} - 6 - a^{2-x} > 0$. Вводя замену $t = a^{2-x}$, приведем неравенство к квадратному $t^2 - t - 6 > 0$, решения которого $t \in (-\infty;\ -2) \cup (3;\ +\infty)$. Неравенство $a^{2-x} < -2$ решений не имеет, а множество решений неравенства $a^{2-x} > 3$ зависит от a.

1. $0 < a < 1$. $a^{2-x} > 3 \Leftrightarrow x > 2 - \log_a 3$.
2. $a > 1$. $a^{2-x} > 3 \Leftrightarrow x < 2 - \log_a 3$.
3. При $a = 1$ неравенство решений не имеет.

Ответ : $x \in (2-\log_a 3;\ +\infty)$ при $0 < a < 1$; $x \in (-\infty;\ 2-\log_a 3)$ при $a > 1$; $\emptyset$ при $a = 1$.

12) Рассмотрим три случая.

1. $0 < a < 1$. $a^{x^2-x} < a^2 \Leftrightarrow x^2 - x > 2 \Leftrightarrow$ $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$.
2. $a > 1$. $a^{x^2-x} < a^2 \Leftrightarrow x^2 - x < 2 \Leftrightarrow x \in (-1;\ 2)$.
3. При $a = 1$ неравенство решений не имеет.

Ответ : $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$ при $0 < a < 1$; $x \in (-1;\ 2)$ при $a > 1$; $\emptyset$ при $a = 1$.

13) Положим $t = a^{x-3} > 0$. Имеем $\sqrt{2-t} < t \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2 - t < t^2 \\ 2 - t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (-\infty;\ -2) \cup (1;\ +\infty) \\ t \in (-\infty;\ 2], \end{cases} \quad \text{откуда } t \in (1;\ 2].$$

Как и в предыдущем примере, рассмотрим три случая:

1. $0 < a < 1$. $1 < a^{x-3} \le 2 \Leftrightarrow \log_a 2 \le x - 3 < 0 \Leftrightarrow 3 + \log_a 2 \le x < 3$.

2. $a > 1$. $1 < a^{x-3} \le 2 \Leftrightarrow 0 < x-3 \le \log_a 2 \Leftrightarrow 3 < x \le \log_a 2+3]$.

3. При $a = 1$ неравенство решений не имеет.

Ответ : $x \in [3 + \log_a 2;\ 3)$ при $0 < a < 1$; $x \in (3;\ \log_a 2 + 3]$ при $a > 1$; $\emptyset$ при $a = 1$.

Пример 2. При каких a следующие неравенства

1) $9^x + (2a+4)3^x + 8a + 1 > 0$, **2)** $4^{x^2} + 2(2a+1)2^{x^2} + 4a^2 - 3 > 0$,
3) $16 \cdot 9^x + 9^{1-x} - 2(4 \cdot 3^x + 3^{1-x}) \ge a$,
4) $(a-1)4^x + (3-a)2^{2x+1} + a > 1$, **5)** $5(a+1)9^x - 10 \cdot 3^x + a - 3 > 0$
выполняются при любом $x \in R$?

Решение.

1) После замены $3^x = t$ приходим к квадратному неравенству $f(t) > 0$, где $f(t) = t^2 + (2a+4)t + 8a + 1$. Учитывая, что $t = 3^x > 0$, задачу переформулируем следующим образом:

при каких a неравенство $f(t) > 0$ выполняется для всех $t > 0$?

Рассмотрим два случая:

1. $\frac{1}{4}D < 0 \Leftrightarrow (a+2)^2-(8a+1) < 0 \Leftrightarrow a^2-4a+3 < 0 \Leftrightarrow a \in (1;\ 3)$. При этих значениях a неравенство $f(t) > 0$ выполняется для любых $t \in R$.

2. $D \ge 0$. Решая систему

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ t_0 \le 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 3 \ge 0 \\ -(a+2) \le 0 \\ 8a + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty;\ 1] \cup [3;\ +\infty) \\ a \in [-2;\ +\infty) \\ a \in [-\frac{1}{8};\ +\infty), \end{cases}$$

получим $a \in [-\frac{1}{8};\ 1] \cup [3; +\infty)$ (t_0 – абсцисса вершины параболы). При этих значениях a квадратный трехчлен принимает отрицательные значения на интервале $(t_1,\ t_2)$, где t_1 и t_2 – корни квадратного трехчлена. Однако, из условий $t_0 \le 0$ и $f(0) \ge 0$ следует, что $t_2 \le 0$, поэтому $f(t) > 0$ при всех $t > 0$.

Ответ : $a \in [-\frac{1}{8};\ 1] \cup (1;\ 3) \cup [3;\ +\infty) = [-\frac{1}{8};\ +\infty)$.

2) Вводя замену $2^{x^2} = t$, получаем квадратное неравенство $f(t) > 0$, где $f(t) = t^2 + 2(2a+1)t + 4a^2 - 3$. Так как $t = 2^{x^2} \ge 1$ для любых $x \in R$, то, в отличие от предыдущего примера, необходимо выяснить, при каких a неравенство $f(t) > 0$ выполняется для всех $t \ge 1$. Снова рассмотрим два случая:

1. $\frac{1}{4}D < 0 \Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4a^2 + 3 < 0 \Leftrightarrow 4a + 4 < 0 \Leftrightarrow a < -1$.

При этих значениях a неравенство $f(t) > 0$ выполняется для любых $t \in R$.

2. $D \geq 0$. Значения a находим из системы

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ t_0 \leq 1 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+4 \geq 0 \\ -(2a+1) \leq 1 \\ 1+2(2a+1)+4a^2-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -1 \\ a \geq -1 \\ a(a+1) > 0, \end{cases}$$

откуда $a > 0$. При этих значениях a квадратный трехчлен принимает отрицательные значения на интервале $(t_1,\ t_2)$, где t_1 и t_2 – корни квадратного трехчлена. Так как $t_0 \leq 1$ и $f(1) > 0$, то $t_2 < 1$ и $f(t) > 0$ при всех $t \geq 1$.

Ответ : $a \in (-\infty;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$.

3) Пусть $t = 4 \cdot 3^x + 3^{1-x}$, тогда $t^2 = 16 \cdot 9^x + 24 + 9^{1-x}$ и первоначальное неравенство примет вид $f(t) \geq 0$, где $f(t) = t^2 - 2t - 24 - a$.

Воспользуемся неравенством $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$. Имеем $t = 4 \cdot 3^x + 3^{1-x} \geq 2\sqrt{4 \cdot 3^x \cdot 3^{1-x}} = 4\sqrt{3}$, причем равенство достигается в случае $4 \cdot 3^x = 3^{1-x} \Leftrightarrow 9^x = \frac{3}{4}$, т.е. при $x = \log_9 \frac{3}{4}$.

По аналогии с предыдущими примерами, задача сводится к нахождению тех значений a, при которых неравенство $f(t) \geq 0$ выполняется для всех $t \geq 4\sqrt{3}$.

1. $\frac{1}{4}D \leq 0 \Leftrightarrow 1+24+a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -25$.

При этих a неравенство $f(t) \geq 0$ выполняется для любого $t \in R$.

2. $D > 0$. Для нахождения a решим систему

$$\begin{cases} D > 0 \\ t_0 \leq 4\sqrt{3} \\ f(4\sqrt{3}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25+a > 0 \\ 1 \leq 4\sqrt{3} \\ 48-8\sqrt{3}-24-a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -25 \\ a \leq 24-8\sqrt{3}, \end{cases}$$

откуда $a \in (-25;\ 24-8\sqrt{3}]$.

Ответ : $a \in (-\infty;\ -25] \cup (-25; 24-8\sqrt{3}] = (-\infty;\ 24-8\sqrt{3}]$.

4) Выполняя тождественные преобразования, получим

$$(a-1)4^x + (3-a)2^{2x+1} + a > 1 \Leftrightarrow (a-1)4^x + 2(3-a)4^x + a > 1 \Leftrightarrow$$
$$4^x(a-5) < a-1. \qquad (4)$$

Рассмотрим три случая:

1. $a < 1$. $4^x(a-5) < a-1 \Leftrightarrow 4^x > \frac{a-1}{a-5} \Leftrightarrow x > \log_4 \frac{a-1}{a-5}$. Неравенство (4) не выполняется для $x \leq \log_4 \frac{a-1}{a-5}$.

2. $1 \leq a \leq 5$. Левая часть неравенства (4) при $a \in [1;\ 5)$ отрицательна, правая неотрицательна. Если же $a = 5$, то имеем очевидное

неравенство $0 < 4$. Таким образом, неравенство (4) выполняется при всех $x \in R$.

3. $a > 5$. $4^x(a-5) < a-1 \Leftrightarrow 4^x < \frac{a-1}{a-5} \Leftrightarrow x < \log_4 \frac{a-1}{a-5}$. Неравенство (4) не выполняется для $x \geq \log_4 \frac{a-1}{a-5}$.

Ответ : $a \in [1;\ 5]$.

5) После замены $3^x = t$ получаем задачу, равносильную первоначальной:

найти все a, при которых неравенство $f(t) > 0$, где $f(t) = 5(a+1)t^2 - 10t + a - 3$, выполняется для всех $t > 0$.

Очевидно, что при $a+1 \leq 0$ неравенство не может выполняться при всех $t > 0$. Пусть $a+1 > 0$. Возможны два случая:

1. $\frac{1}{4}D < 0 \Leftrightarrow 25 - 5(a-3)(a+1) < 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 > 0 \Leftrightarrow$ $a \in (-\infty;\ -2) \cup (4;\ +\infty)$. С учетом того, что $a+1 > 0$, получаем $a \in (4;\ +\infty)$. При этих a неравенство $f(t) > 0$ выполняется для всех $t \in R$.

2. Дискриминант квадратного трехчлена неотрицателен, но корни не положительные. Значения a находим из системы

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ t_0 \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-2;\ 4] \\ \frac{1}{a+1} \leq 0 \\ a - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-2;\ 4] \\ a \in (-\infty;\ -1) \\ a \in [3;\ +\infty). \end{cases}$$

Система решений не имеет.

Ответ : $a \in (4;\ +\infty)$.

Пример 3. При каких a неравенство $25^x - a \cdot 5^x + 3 - a \leq 0$ имеет хотя бы одно решение?

Решение. После замены $5^x = t > 0$ задачу можно сформулировать следующим образом:

при каких a неравенство $f(t) \leq 0$, где $f(t) = t^2 - at + 3 - a$, имеет хотя бы одно положительное решение?

Неравенство $f(t) \leq 0$ будет иметь решения, если $D \geq 0 \Leftrightarrow$ $a^2 - 4(3-a) \geq 0$, т.е. при $a \in (-\infty;\ -6] \cup [2;\ +\infty)$. Множество решений неравенства $f(t) \leq 0$ при $D > 0$ – отрезок $[t_1;\ t_2]$, где t_1 и t_2 – корни квадратного трехчлена. Ясно, что положительные решения будут в случае $t_2 \geq 0$. Воспользуемся формулами Виета $t_1 + t_2 = a$, $t_1 \cdot t_2 = 3 - a$. При $a \leq -6$ оба корня отрицательны, так как $t_1 \cdot t_2 > 0$, а $t_1 + t_2 < 0$. При $a \geq 2$ по крайней мере один корень положителен, поскольку $t_1 + t_2 > 0$. При $a = 2$ $(D = 0)$ неравенство $f(t) \leq 0$ имеет единственное решение $t = 1$, а первоначальное неравенство – единственное решение $5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Ответ : $a \in [2;\ +\infty)$.

Пример 4. При каких a каждое решение неравенства

$$0,4^{x^2+1} \geq 6,25^{a-3x} \qquad (5)$$

является решением неравенства

$$x^2-6x+4 < a^2 \qquad (6)$$

Решение. Неравенство (5) перепишем в виде

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{2(a-3x)} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{6x-2a},$$

откуда $x^2+1 \leq 6x-2a \Leftrightarrow x^2-6x+2a+1 \leq 0$. Множество решений неравенства (5) $X_1 = [3-\sqrt{8-2a};\ 3+\sqrt{8-2a}]$. Нам надо найти те значения a, при которых неравенство (6) является следствием неравенства (5), т.е. выполняется включение $X_1 \subset X_2$, где $X_2 = (3-\sqrt{5+a^2};\ 3+\sqrt{5+a^2})$ – множество решений неравенства (6). Поскольку пустое множество является подмножеством любого множества, а $X_1 = \emptyset$ при $a > 4$, то значения $a \in (4;\ +\infty)$ удовлетворяют условиям задачи.

Если $X_1 \neq \emptyset$, то значения a, при которых $X_1 \subset X_2$, найдем из условий $\begin{cases} 3-\sqrt{5+a^2} < 3-\sqrt{8-2a} \\ 3+\sqrt{8-2a} < 3+\sqrt{5+a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{8-2a} < \sqrt{5+a^2} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 8-2a < 5+a^2 \\ a \leq 4, \end{cases}$ откуда $a \in (-\infty;\ -3) \cup (1;\ 4]$.

Ответ : $a \in (-\infty;\ -3) \cup (1;\ 4] \cup (4;\ +\infty) = (-\infty;\ -3) \cup (1;+\infty)$.

Упражнения.

1. Решить неравенства

1) $\dfrac{a^x}{a^x-1} > \dfrac{1+a^x}{1-2a^{-x}}$, **2)** $a \cdot 2^x \leq a^2$, **3)** $a^{x^2-15} > a^{2x}$,

4) $|2^x-2^{-x}| > 2^a-2^{-a}$, **5)**$4^{x+1}a^2-65 \cdot 2^x a+16 > 0$, 6) $x^{\log_a x} < a$.

2. При каких a неравенство $4^x+(a-1)2^x+(2a-5) > 0$ выполняется при любом $x \in R$?

3. При каких a неравенство $36^x+a \cdot 6^x+a+8 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение?

4. При каких a каждое решение неравенства

$$0,5^{\frac{1}{2(x-1)^2}} \leq 0,25^{\frac{1}{(3-x)^2}}$$

является решением неравенства $16a^4x^2-9 \leq 0$?

§5. Системы уравнений и неравенств

Пример 1. Решить систему

1) $\begin{cases} a\cdot 5^x+2\cdot 7^y=a+2\\ 2a\cdot 5^x+(a+1)\cdot 7^y=2a+4,\end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9^x-(a+1)3^x+a<0\\ 9^x+(a+3)3^x+3a<0,\end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^{x+1}-2a<3+2^x\\ 3(a-2)>1-2^{x+1},\end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2|x-1|+2^{\sqrt{y-2}}=2-a\\ -|x-1|+2^{1+\sqrt{y-2}}=3a-1.\end{cases}$

Решение.

1) Умножим все члены первого уравнения на -2 и сложим со вторым уравнением, получим $(a-3)7^y=0$. Ясно, что при $a\neq 3$ последнее уравнение, а следовательно, и система, решений не имеют.

При $a=3$ получим одно уравнение $3\cdot 5^x+2\cdot 7^y=5$, имеющее бесконечное множество решений. Пусть $5^x=t$ $(t>0)$, тогда $x=\log_5 t$, $7^y=\frac{1}{2}(5-3t)$, откуда $y=\log_7\frac{1}{2}(5-3t)$ при условии $5-3t>0 \Leftrightarrow t<\frac{5}{3}$.

Ответ : $\emptyset$ при $a\neq 3$; $x=\log_5 t$, $y=\log_7\frac{1}{2}(5-3t)$ $(0<t<\frac{5}{3})$ при $a=3$.

2) Так как $9^x+(a+3)3^x+3a<0 \Leftrightarrow (3^x+3)(3^x+a)<0 \Leftrightarrow 3^x<-a$, то множество решений второго неравенства системы $x\in(-\infty;\ \log_3(-a))$, $(a<0)$. Первое неравенство системы при $a<0$ $9^x-(a+1)3^x+a<0 \Leftrightarrow (3^x-1)(3^x-a)<0 \Leftrightarrow 3^x<1$ имеет решения $x\in(-\infty;\ 0)$. Критическое значение $a=-1$ находим из уравнения $\log_3(-a)=0$.

1. $a\in(-\infty;\ -1)$. В этом случае $0<\log_3(-a)$, следовательно, множество решений системы $x\in(-\infty;\ 0)$.

2. $a\in[-1;\ 0)$. Поскольку $\log_3(-a)\le 0$, то множество решений системы $x\in(-\infty;\ \log_3(-a))$.

Ответ : $x\in(-\infty;\ 0)$ при $a\in(-\infty;\ -1)$; $x\in(-\infty;\ \log_3(-a))$ при $a\in[-1;\ 0)$; $\emptyset$ при $a\ge 0$.

3) $\begin{cases} 2^{x+1}-2a<3+2^x\\ 3(a-2)>1-2^{x+1}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(7-3a)<2^x<2a+3.$

Условие $\frac{1}{2}(7-3a)<2a+3$ выполняется при $a>\frac{1}{7}$. Если $a\in(\frac{1}{7};\ \frac{7}{3})$, то $\frac{1}{2}(7-3a)>0$ и $x\in(\log_2\frac{1}{2}(7-3a);\ \log_2(2a+3))$. Если же $a\ge\frac{7}{3}$, то $\frac{1}{2}(7-3a)\le 0$ и $x\in(-\infty;\ \log_2(2a+3))$.

Ответ : $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ \frac{1}{7}]$; $x \in (\log_2 \frac{1}{2}(7-3a);\ \log_2(2a+3))$ при $a \in (\frac{1}{7};\ \frac{7}{3})$; $x \in (-\infty;\ \log_2(2a+3))$ при $a \in [\frac{7}{3};\ +\infty)$.

4) Умножая обе части первого уравнения на 3 и складывая его со вторым уравнением, получим $5|x-1| + 5 \cdot 2^{\sqrt{y-2}} = 5 \Leftrightarrow |x-1| + 2^{\sqrt{y-2}} = 1$. Так как $|x-1| \geq 0$, $2^{\sqrt{y-2}} \geq 1$, то последнее равенство возможно только в случае $|x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1$ и $2^{\sqrt{y-2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{y-2} = 0 \Leftrightarrow y = 2$. После подстановки в систему $x = 1$, $y = 2$, находим $a = 1$.

Ответ : $x = 1$, $y = 2$ при $a = 1$; $\emptyset$ при $a \neq 1$.

Пример 2. При каких a следующие системы

1) $\begin{cases} a \cdot 7^x + 15^y = 0 \\ 7^x + a \cdot 15^y = 0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6 \cdot 2^{x^2} + \sin y = 4a - 2 \\ 8 \cdot 2^{x^2} - 5\sin y = 10 - a, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7^{x+1} + 2y^2 = 3a + 31 \\ 2 \cdot 7^x - 7y^2 = 16a - 29, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2^{3x} - 2^{8y-3x+3} \geq 2^{4y+1} \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$

имеют решения?

Решение.

1) Так как $7^x > 0$ и $15^y > 0$, то при $a \geq 0$ система решений не имеет. Пусть $a < 0$. Умножим все члены первого уравнения на $-a$. Складывая уравнения, получим $(1-a^2) \cdot 7^x = 0$, откуда $a = \pm 1$. Поскольку $a < 0$, то система имеет решение только при $a = -1$.

Ответ : $a = -1$.

2) Решая систему относительно переменных 2^{x^2} и $\sin y$, имеем $2^{x^2} = \frac{a}{2}$, $\sin y = a - 2$. Так как $2^{x^2} \geq 1$, $|\sin y| \leq 1$, то получаем ограничения на a, а именно, $\frac{a}{2} \geq 1$, $-1 \leq a - 2 \leq 1$, откуда $a \in [2;\ 3]$.

Ответ : $a \in [2;\ 3]$.

3) Как и в предыдущем примере, находим $7^x = a+3$, $y^2 = -2a+5$. Искомые значения a получим из условий $a + 3 > 0$, $-2a + 5 \geq 0$, а именно, $a \in (-3;\ \frac{5}{2}]$.

Ответ : $a \in (-3;\ \frac{5}{2}]$.

4) Домножим обе части неравенства на 2^{-3x}, получим $1 - 2^{8y-6x+3} \geq 2^{4y-3x+1} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{8y-6x+2} + 2^{4y-3x+1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (t+1)(2t-1) \leq 0$, где $t = 2^{4y-3x+1}$.

Учитывая, что $t > 0$, множество решений неравенства $(t+1)(2t-1) \le 0$ есть промежуток $(0;\ \frac{1}{2}]$. Далее имеем $t \le \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ 2^{4y-3x+1} \le 2^{-1} \ \Leftrightarrow\ 4y - 3x + 2 \le 0$.

Уравнение $x^2 + y^2 = a$ при $a > 0$ задает на плоскости окружность с центром в начале координат. Поскольку начало координат не принадлежит полуплоскости $4y - 3x + 2 \le 0$, то система $\begin{cases} 4y - 3x + 2 \le 0 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ будет иметь решения тогда, когда прямая $4y - 3x + 2 = 0$ и окружность $x^2 + y^2 = a$ будут иметь общие точки. А это, в свою очередь, будет в том случае, когда имеет решения система уравнений $\begin{cases} 4y - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$

Исключим y из первого уравнения и подставим во второе. Квадратное уравнение $25x^2 - 12x + 4 - 16a = 0$ имеет решения при условии $\frac{1}{4}D \ge 0 \ \Leftrightarrow\ 36 - 25(4 - 16a) \ge 0 \ \Leftrightarrow\ 25a \ge 4$,

Ответ : $a \ge \frac{4}{25}$.

Пример 3. При каких a и b система $\begin{cases} ax + by = 5 \\ 3^{2(x-y)} - 6 \cdot 3^{-2x} - 3^{y} > 0 \end{cases}$ имеет решения?

Решение. Умножим обе части неравенства на 3^{2x} и введем обозначение $3^{2x-y} = t$. Имеем $3^{2(2x-y)} - 3^{2x-y} - 6 > 0 \ \Leftrightarrow\ t^2 - t - 6 > 0 \ \Leftrightarrow\ (t+2)(t-3) > 0$. Учитывая, что $t > 0$, получаем $t > 3 \ \Leftrightarrow\ 3^{2x-y} > 3 \ \Leftrightarrow\ 2x - y > 1$. Первоначальная система свелась к системе $\begin{cases} ax + by = 5 \\ 2x - y > 1. \end{cases}$

При $a = b = 0$ система решений не имеет. Если же $a^2 + b^2 \ne 0$ (это означает, что по крайней мере один из коэфициентов a или b отличен от нуля), то уравнение $ax + by = 5$ задает на плоскости прямую. Она будет иметь общие точки с полуплоскостью $2x - y > 1$ в следующих случаях:

1. Прямые $ax + by = 5$ и $2x - y = 1$ пересекаются. Это означает, что $\frac{a}{2} \ne \frac{b}{-1}$, т.е. $a + 2b \ne 0$.

2. Прямые $ax + by = 5$ и $2x - y = 1$ параллельны $(a + 2b = 0)$, а прямая $ax + by = 5 \ \Leftrightarrow\ ax - \frac{a}{2}y = 5 \ \Leftrightarrow\ 2x - y = \frac{10}{a}$ лежит в полуплоскости $2x - y > 1$. Это будет в случае $\frac{10}{a} > 1$, откуда $a \in (0;\ 10)$.

Ответ : 1. $a \neq -2b$. 2. $a = -2b, \quad 0 < a < 10$.

Пример 4. При каких a решения системы $\begin{cases} 2^x + 4^y = a \\ 2^{x+1} - 4^y = 3 \end{cases}$ удовлетворяют условию $x > y$?

Решение. Выполняя преобразования, получим

$$\begin{cases} 2^x + 4^y = a \\ 2 \cdot 2^x - 4^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2^x = a + 3 \\ 3 \cdot 4^y = 2a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{1}{3}(a+3) \\ 4^y = \frac{1}{3}(2a-3), \end{cases}$$

откуда $x = \log_2 \frac{1}{3}(a+3)$, $y = \log_4 \frac{1}{3}(2a-3)$.

Остается решить неравенство $x > y \Leftrightarrow$

$$\log_2 \frac{1}{3}(a+3) > \log_4 \frac{1}{3}(2a-3) \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{3}(a+3) > \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{3}(2a-3) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + 3 > 0 \\ 2a - 3 > 0 \\ \frac{1}{9}(a+3)^2 > \frac{1}{3}(2a-3). \end{cases}$$

Последняя система выполняется при $a > \frac{3}{2}$.

Ответ : $a \in (\frac{3}{2}; \ +\infty)$.

Пример 5. При каких a следующие системы

$$\mathbf{1)}\begin{cases} 4^x + 81^y = 1 \\ 2^x + 9^y = a, \end{cases} \qquad \mathbf{2)}\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5 \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0, \quad x \in [-6; \ 0]. \end{cases}$$

$$\mathbf{3)}\begin{cases} 7^{2x} - 4 \cdot 7^x + 3 - a \leq 0 \\ 7^{2x} - 2 \cdot 7^x + 6a - 3 \leq 0, \end{cases} \qquad \mathbf{4)}\begin{cases} x^2 + y^2 = c \\ x + y^2 + a = |y| + 2^{|y|} + 1, \end{cases}$$

где $c = (3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + 4)(3\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 3\sqrt{2} + 4)$, имеют единственное решение?

Решение.

1) *Первый способ.* Пусть $u = 2^x$, $v = 9^y$ $(u > 0, \ v > 0)$. Исключая v из второго уравнения системы

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ u + v = a, \end{cases} \tag{1}$$

получим уравнение $u^2 + (a - u)^2 = 1 \Leftrightarrow 2u^2 - 2au + a^2 - 1 = 0$. Учитывая, что $a = u + v > 0$, задачу можно сформулировать следующим образом:

при каких $a > 0$ уравнение $2u^2 - 2au + a^2 - 1 = 0$ имеет единственный положительный корень?

Это возможно в двух случаях:

1. $\frac{1}{4}D = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2(a^2-1) = 0 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$.

При $a = \sqrt{2}$ имеем $u = v = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. $D > 0$, $u_1 \cdot u_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a^2 - 1) < 0$. С учетом $a > 0$ получаем $0 < a < 1$. В этом случае $u_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{2-a^2}) < 0$, $u_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{2-a^2}) > 0$, $v_1 = a - u_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{2-a^2}) > 0$, $v_2 = a - u_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{2-a^2}) < 0$, следовательно, ни одно решение системы (1) $(u_1,\ v_1)$, $(u_2,\ v_2)$ не удовлетворяет условию $u > 0$, $v > 0$.

Второй способ. Если $(u_0,\ v_0)$ – решение системы (1), то в силу симметрии и $(v_0,\ u_0)$ – решение системы (1). Система может иметь единственное решение при условии $u_0 = v_0$. Из уравнений $2u_0^2 = 1$, $2u_0 = a$ (с учетом $u > 0$, $v > 0$, $a > 0$) следует, что $u_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $a = \sqrt{2}$. Остается убедиться в том, что система $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ u + v = \sqrt{2} \end{cases}$ имеет единственное решение. После исключения v получаем квадратное уравнение $2u^2 - 2\sqrt{2}u + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}u - 1)^2 = 0$, которое имеет единственный корень $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Замечание. Задача имеет простую геометрическую иллюстрацию. Из семейства прямых $u + v = a$ только две $(u + v = \pm\sqrt{2})$ касаются окружности $u^2 + v^2 = 1$. Это означает, что система (1) имеет единственное решение при $a = \pm\sqrt{2}$. Однако, условию $u > 0$, $v > 0$ удовлетворяет только одно значение $a = \sqrt{2}$.

Ответ : $a = \sqrt{2}$.

2) Докажем четность функции $f(y) = (3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y$. Так как $(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$, то $f(-y) = (3 - 2\sqrt{2})^{-y} + (3 + 2\sqrt{2})^{-y} = (\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}})^y + (\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}})^y = (3 + 2\sqrt{2})^y + (3 - 2\sqrt{2})^y = f(y)$. Кроме того, четной является функция y^2, входящая во второе уравнение системы. Поэтому, если $(x_0,\ y_0)$ – решение системы, то и $(x_0,\ -y_0)$ – решение системы. Для единственности решения необходимо выполнение условия $y_0 = -y_0 \Leftrightarrow y_0 = 0$.

При $y = 0$ получим систему

$$\begin{cases} 2 - 3a = x^2 + 6x + 5 \\ (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = x^2 + 6x + 3 \\ (a-2)(a-3)x^2 = 0, \end{cases} \quad (-6 \le x \le 0).$$

Поскольку при $x = 0$ из первого уравнения находим $a = -1$, то необходимо проверить три значения a $(a = -1,\ a = 2,\ a = 3)$.

1. $a = -1$. Оценим левую и правую части первого уравнения системы $(3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + 2\sqrt{2})^y = x^2 + 6x + 2$. Пусть $(3 - 2\sqrt{2})^y = t$,

тогда $(3+2\sqrt{2})^y = \frac{1}{t}$. Так как $t > 0$, то $t + \frac{1}{t} \geq 2$, причем равенство $t + \frac{1}{t} = 2$ возможно только при $t = 1$, т.е. при $y = 0$. С другой стороны, $x^2 + 6x = x(x+6) \leq 0$ при $x \in [-6;\ 0]$, поэтому $x^2 + 6x + 2 \leq 2$. Таким образом, первое уравнение равносильно системе $(3-2\sqrt{2})^y + (3+2\sqrt{2})^y = 2 = x^2 + 6x + 2$. С учетом второго уравнения $12x^2 = 0$, получаем единственное решение $x = y = 0$.

Из уравнения $y^2 = (a-2)(a-3)x^2$ при $a = 2$ и $a = 3$ следует, что $y = 0$. Первое уравнение принимает вид $x^2 + 6x + 3 + 3a = 0$.

2. $a = 2$. $x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \in [-6;\ 0]$. Система имеет единственное решение $x = -3$, $y = 0$.

3. $a = 3$. Уравнение $x^2 + 6x + 12 = 0$ решений не имеет.

Ответ : $a \in \{-1;\ 2\}$.

3) После замены $7^x = t > 0$ получим систему

$$\begin{cases} t^2 - 4t + 3 - a \leq 0 \\ t^2 - 2t + 6a - 3. \leq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Она имеет решения при условии

$$\begin{cases} \frac{1}{4}D_1 \geq 0 \\ \frac{1}{4}D_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 3 + a \geq 0 \\ 1 - 6a + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -1 \\ a \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-1;\ \tfrac{2}{3}].$$

Рассмотрим отдельно случаи $a = -1$, $a = \frac{2}{3}$ и $a \in (-1;\ \frac{2}{3})$.

1. $a = -1$. Первое неравенство системы (2) $t^2 - 4t + 4 \leq 0$ имеет единственное решение $t = 2$, удовлетворяющее второму неравенству $t^2 - 2t - 9 \leq 0$.

2. $a = \frac{2}{3}$. Второе неравенство системы (2) $t^2 - 2t + 1 \leq 0$ имеет единственное решение $t = 1$, являющееся решением и первого неравенства $t^2 - 4t + \frac{7}{3} \leq 0$.

Таким образом, исходная система имеет единственное решение $x = \log_7 2$ при $a = -1$ и $x = 0$ при $a = \frac{2}{3}$.

3. $a \in (-1;\ \frac{2}{3})$. Множество решений первого неравенства системы (2) – отрезок $[2 - \sqrt{1+a};\ 2 + \sqrt{1+a}]$, множество решений второго неравенства – отрезок $[1 - \sqrt{4-6a};\ 1 + \sqrt{4-6a}]$. Единственное решение системы (2) может быть только в случае существования решений совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2 + \sqrt{1+a} = 1 - \sqrt{4-6a} \\ 1 + \sqrt{4-6a} = 2 - \sqrt{1+a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + \sqrt{1+a} + \sqrt{4-6a} = 0 \\ \sqrt{4-6a} + \sqrt{1+a} = 1. \end{array}\right.$$

При $a \leq 0$ $\sqrt{4-6a} > 1$, а при $a > 0$ $\sqrt{1+a} > 1$, поэтому второе уравнение совокупности решений не имеет. Очевидно, что и первое уравнение решений не имеет.

Ответ : $a \in \{-1;\ \frac{2}{3}\}$.

4) Выполняя тождественные преобразования, получим $c = ((3\sqrt{3}+4)+(2\sqrt{6}+3\sqrt{2}))((3\sqrt{3}+4)-(2\sqrt{6}+3\sqrt{2})) = (3\sqrt{3}+4)^2-(2\sqrt{6}+3\sqrt{2})^2 = 27+24\sqrt{3}+16-24-12\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}-18 = 1$.

Далее, учитывая четность функций y^2, $|y|$ и $2^{|y|}$, замечаем, что если $(x_0;\ y_0)$ – решение системы, то и $(x_0;\ -y_0)$ – решение системы. Следовательно, для единственности решения системы необходимо выполнение условия $y_0 = -y_0 \Leftrightarrow y_0 = 0$.

В случае $y = 0$ система

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y^2+a=|y|+2^{|y|}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x+a=2 \end{cases}$$

имеет решения $x = 1$ $(a = 1)$ и $x = -1$ $(a = 3)$.

Найденные значения a необходимо проверить.

1. $a = 1$. Докажем, что система

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y^2=|y|+2^{|y|} \end{cases}$ имеет единственное решение $(x = 1,\ y = 0)$.

Из условия $x^2+y^2 = 1$ следует, что $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$. Из второго уравнения системы имеем $x = |y|+2^{|y|}-y^2 = |y|(1-|y|)+2^{|y|} \ge 1$. Сравнивая неравенства $|x| \le 1$ и $x \ge 1$, получаем $x = 1$, а из первого уравнения – $y = 0$.

2. $a = 3$. Система $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y^2+2=|y|+2^{|y|}, \end{cases}$ кроме решения $x = -1$, $y = 0$, имеет и другие решения (например, $x = 0$, $y = \pm 1$). Следовательно, при $a = 3$ свойством единственности решения система не обладает.

Ответ : $a = 1$.

Пример 6. Определить число решений системы

$$\begin{cases} 2^{x+1}-a\cdot 7^x=5 \\ 3\cdot 7^x-6\cdot 2^x=-15. \end{cases}$$

Решение. Поделим все члены второго уравнения на 3 и сложим с первым уравнением. Получим $(1-a)\cdot 7^x = 0$, откуда следует, что при $a \ne 1$ последнее уравнение, а вместе с ним и система, решений не имеют. При $a = 1$ первое уравнение системы примет вид $2\cdot 2^x = 7^x+5$.

Если $x \le 1$, то $2\cdot 2^x \le 4 < 5 < 5+7^x$.

Если же $x > 1$, то $2\cdot 2^x < 4^x < 7^x < 7^x+5$.

Таким образом, и при $a = 1$ система решений не имеет.

Ответ : $\emptyset$ при $a \in R$.

Пример 7. При каких a система $\begin{cases} 225^x + 324^y = 2(1+a) \\ (15^x + 18^y)^2 = 14 \end{cases}$ имеет нечетное число решений?

Решение. Если $(u_0;\ v_0)$ - решение системы $\begin{cases} u^2 + v^2 = 2(1+a) \\ (u+v)^2 = 14, \end{cases}$ где $u = 15^x > 0,\ v = 18^y > 0,$ то $(v_0,\ u_0)$ тоже решение этой системы. Следовательно, система имеет нечетное число решений (одно), если $v_0 = u_0$. При $u = v$ получим систему $\begin{cases} 2u^2 = 2(1+a) \\ 4u^2 = 14, \end{cases}$ откуда $u^2 = \frac{7}{2}$ и $a = \frac{5}{2}$.

Ответ : $a = \frac{5}{2}$.

Пример 8. При каких a система $\begin{cases} a \cdot 9^x + 7^y = 1 \\ 4 \cdot 9^x + 2 \cdot 7^y = a \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Решение. Система $\begin{cases} au + v = 1 \\ 4u + 2v = a, \end{cases}$ где $u = 9^x > 0,\ v = 7^y > 0,$ имеет бесконечно много решений при $a = 2$, так как условие $\frac{a}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{a}$ (пропорциональность коэффициентов при неизвестных и свободных членов) выполняется только при $a = 2$. В этом случае одно из уравнений системы является следствием другого. Покажем теперь, что уравнение $2 \cdot 9^x + 7^y = 1 \Leftrightarrow 2u + v = 1$ имеет бесконечно много решений. Из условий $u = 9^x,\ v = 7^y$ находим $x = \log_9 u,\ y = \log_7 v = \log_7(1-2u)$ $(0 < u < \frac{1}{2})$.

Итак, система имеет решения $x = \log_9 u,\ y = \log_7(1-2u)$ при любом $u \in (0;\ \frac{1}{2})$.

Ответ : $a = 2$.

Упражнения.

1. Решить системы

1) $\begin{cases} 6^x - a > -1 \\ 6^x + 3 < 3a + 1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x+2)^2 + 2 \cdot 3^{|y-2|} = a - 1 \\ 3^{1+|y-2|} - (x+2)^2 = 4a - 9. \end{cases}$

2. При каких a следующие системы

1) $\begin{cases} 2\,\mathrm{tg}^2\, x + 3^{1-\sqrt{y}} = 5a - 1 \\ 4\,\mathrm{tg}^2\, x - 3^{-\sqrt{y}} = 3a - 2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3 \cdot 3^{x^2} + \sin^2 y = 4a + 2 \\ 9 \cdot 3^{x^2} - 4\sin^2 y = 5a + 6, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2\cos x + 2\cdot 2^{\frac{1}{y^2}} = 4a - 1 \\ 4\cos x - 2^{\frac{1}{y^2}} = 3a - 2 \end{cases}$

имеют решения?

3. При каких a и b система $\begin{cases} ax + by = 7 \\ 3^{2x+y} + 6\cdot 3^{2y} - 3^{4x} < 0 \end{cases}$

имеет решения?

4. При каких a следующие системы

1) $\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|} + 3|x| - 2 = 5y + 3x^2 - 5a \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$

4) $\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x - 5 = a - 2y + y^2 \\ x^2 + (2 - a - a^2)y^2 = 0, \quad y \in [0;\ 2]. \end{cases}$

имеют единственное решение?

Глава 2
Логарифмические уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств

§1. Решение уравнений

Приведем некоторые эквивалентности, используемые при решении логарифмических уравнений.

1. Уравнение $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0, \quad f(x) \neq 1, \quad g(x) > 0. \end{cases}$$

В частности, если $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\log_a g(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2. Уравнение $\log_a g(x) = b \Leftrightarrow g(x) = a^b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ g(x) > 0)$.

Примеры. Решить уравнения.

1) $\log_a x + \log_a(x-2) = 1$, **2)** $\log_3 2a + \log_3 x(a-2) = \log_3(a-2)$,

3) $1 + \log_a(x-1)\log_x a = \dfrac{2}{\log_a x}$, **4)** $\dfrac{\log_a^2 x - 2}{4 - \log_a x} = 1$,

5) $\log_a x^2 + 2\log_a(x+2) = 1$, **6)** $\log_{\sqrt{2-x}} \sqrt{2x+a} = 2$,

7) $\log_3 x + 3\log_a x + \log_9 x = 5$, **8)** $\log_5(2-|x-a|) + \log_{0,2}(5-x) = 0$,

9) $\log_a \sqrt{1+x} + 3\log_{a^2}(1-x) = \log_{a^4}(1-x^2)^2 + 2$,

10) $\log_{2x}(ax+1) = \frac{1}{2}$, **11)** $\lg(x-2a) - \lg(b-a) = \lg(b+a) - \lg x$,

12) $\lg ax^2 - \lg(4-2x) = 0$, **13)** $8\log_{a^2}^2(x-a) - 6\log_{a^2}(x-a) + 1 = 0$,

14) $\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1$.

Решение.

1) На ОДЗ уравнения $(x > 2)$ имеем $\log_a x + \log_a(x-2) = 1 \Leftrightarrow \log_a x(x-2) = 1 \Leftrightarrow x(x-2) = a$, откуда $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+a}$. Ясно, что $x_1 = 1 - \sqrt{1+a} \notin (2;\ +\infty)$, а $x_2 = 1 + \sqrt{1+a} > 2$. Таким образом, уравнение при любых $a > 0$, $a \neq 1$ имеет решение $x = 1 + \sqrt{1+a}$.

Ответ : $x = 1 + \sqrt{1+a}$.

2) На ОДЗ $(a > 2,\ x > 0)$ имеем $\log_3 2a + \log_3 x(a-2) = \log_3(a-2) \Leftrightarrow 2a(a-2)x = a-2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2a}$.

Ответ : $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ 2]$; $x = \frac{1}{2a}$ при $a \in (2;\ +\infty)$.

3) ОДЗ уравнения $x > 1$, $a > 0$, $a \neq 1$. Выполняя тождественные преобразования на ОДЗ, получим
$1 + \log_a(x-1)\log_x a = \frac{2}{\log_a x}, \Leftrightarrow \frac{\log_a x + \log_a(x-1)}{\log_a x} = \frac{2}{\log_a x}, \Leftrightarrow$
$\log_a x(x-1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - a^2 = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4a^2})$. Так как $x_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4a^2}) < 1$, то x_1 не является корнем исходного уравнения. Второй корень $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a^2}) > 1$ при любом $a > 0$.

Ответ : $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a^2})$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

4) На ОДЗ уравнения $(x > 0,\ x \neq a^4,\ a > 0,\ a \neq 1)$ имеем $\log_a^2 x - 2 = 4 - \log_a x \Leftrightarrow \log_a^2 x + \log_a x - 6 = 0$, откуда $\log_a x = -3 \Leftrightarrow x = a^{-3}$ и $\log_a x = 2 \Leftrightarrow x = a^2$. Условие $x = a^4 \Leftrightarrow a^{-3} = a^4$ или $a^2 = a^4$ не выполняется на ОДЗ.

Ответ : $x = a^{-3}$, $x = a^2$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

5) На ОДЗ $(x \in (-2;\ 0) \cup (0;\ +\infty),\ a > 0,\ a \neq 1)$ имеем $\log_a x^2 + 2\log_a(x+2) = 1 \Leftrightarrow 2\log_a |x|(x+2) = 1 \Leftrightarrow |x|(x+2) = \sqrt{a}$.
Рассмотрим два случая.

1. $x \in (-2;\ 0)$. $|x|(x+2) = \sqrt{a} \Leftrightarrow x^2 + 2x + \sqrt{a} = 0$. Легко проверить, что при $0 < a < 1$ оба корня $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\sqrt{a}}$ существуют и принадлежат интервалу $(-2;\ 0)$. При $a > 1$ $\frac{1}{4}D = 1 - \sqrt{a} < 0$, следовательно, уравнение не имеет корней, принадлежащих интервалу $(-2;\ 0)$.

2. $x \in (0;\ +\infty)$. $|x|(x+2) = \sqrt{a} \Leftrightarrow x^2 + 2x - \sqrt{a} = 0$. Ясно, что $x = -1 - \sqrt{1+\sqrt{a}} \notin (0;\ +\infty)$ ни при каких $a > 0$, а $x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}} > 0$ для любого $a > 0$.

Ответ : $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\sqrt{a}}$, $x_3 = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$ при $a \in (0;\ 1)$; $x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

6) При выполнении условий $x < 2$, $x \neq 1$, $2x + a > 0$ исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{2x+a} = 2 - x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 - a = 0$, откуда $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5+a}$ $(a \geq -5)$. Неравенство $2x + a > 0$ выполняется автоматически, так как $2x + a = (2-x)^2 > 0$ при $x \neq 2$. Ясно, что $x_1 = 3 + \sqrt{5+a} > 2$. Выясним теперь, при каких a $x_2 < 2$.

$x_2 < 2 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5+a} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{5+a} > 1 \Leftrightarrow a > -4.$

Исключим значение a, при котором $x_2 = 1$.

$x_2 = 1 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5+a} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5+a} = 2 \Leftrightarrow a = -1.$

Замечание. Так как $x_1 = 3 + \sqrt{5+a} > 2$, то значения a, при которых $x_2 < 2$ можно найти из условия $f(2) < 0$, где $f(x) = x^2 - 6x + 4 - a$. Действительно, $f(2) < 2$ $\Leftrightarrow 4 - 12 + 4 - a < 0 \Leftrightarrow a > -4$.

Ответ : $x = 3 - \sqrt{5+a}$ при $a \in (-4;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$; $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ -4] \cup \{-1\}$.

7) На ОДЗ уравнения $(x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$ имеем

$\log_3 x + 3\log_a x + \log_9 x = 5 \Leftrightarrow \log_3 x + \dfrac{3\log_3 x}{\log_3 a} + \frac{1}{2}\log_3 x = 5 \Leftrightarrow$
$\log_3 x \cdot \dfrac{3(\log_3 a + 2)}{2\log_3 a} = 5$. Если $\dfrac{3(\log_3 a + 2)}{2\log_3 a} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}$, то уравнение решений не имеет. При $a \neq \frac{1}{9}$ $\log_3 x = \dfrac{10\log_3 a}{3(\log_3 a + 2)}$,

откуда $x = 3^{\frac{10\log_3 a}{3(\log_3 a + 2)}}$.

Ответ : $x = 3^{\frac{10\log_3 a}{3(\log_3 a + 2)}}$ при $a \in (0;\ \frac{1}{9}) \cup (\frac{1}{9};\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; $\emptyset$ при $a = \frac{1}{9}$.

8) Перейдём к основанию 5, получим

$\log_5(2-|x-a|)+\log_{0,2}(5-x) = 0 \Leftrightarrow \log_5(2-|x-a|)-\log_5(5-x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2 - |x-a| = 5 - x \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-a| = x - 3 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 = (x-3)^2 \\ 3 \le x < 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(a-3) = a^2 - 9 \\ 3 \le x < 5. \end{cases}$ При $a = 3$ множество решений уравнения – промежуток $[3;\ 5)$. При $a \neq 3$ $x = \frac{1}{2}(a+3)$. Решая неравенство $3 \le \frac{1}{2}(a+3) < 5$, получим $3 \le a < 7$.

Ответ : $x \in [3;\ 5)$ при $a = 3$; $x = \frac{1}{2}(a+3)$ при $a \in (3;\ 7)$; $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ 3) \cup [7;\ +\infty)$.

9) С учётом ОДЗ $(-1 < x < 1,\ a > 0,\ a \neq 1)$ выполним равносильные преобразования. Получим

$\frac{1}{2}\log_a(1+x) + \frac{3}{2}\log_a(1-x) = \frac{1}{2}(\log_a(1-x) + \log_a(1+x)) + 2 \Leftrightarrow$
$\log_a(1-x) = 2 \Leftrightarrow x = 1 - a^2$. Условие $-1 < 1 - a^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < a^2 < 2$ имеет место при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ \sqrt{2})$.

Ответ : $x=1-a^2$ при $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ \sqrt{2})$; $\emptyset$ при $a\in[\sqrt{2};\ +\infty)$.

10) На ОДЗ уравнения $(x>0,\ x\neq\frac{1}{2},\ ax+1>0)$
$\log_{2x}(ax+1)=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ ax+1=\sqrt{2x}\ \Leftrightarrow\ a^2x^2-2(1-a)x+1=0.$
Рассмотрим несколько случаев.

1. $a=0$. Исходное уравнение решений не имеет.

2. $D=0\ \Leftrightarrow\ a=\frac{1}{2}$. Уравнение имеет единственное решение $x=2$.

3. $D>0\ \Leftrightarrow\ (1-a)^2-a^2>0\ \Leftrightarrow\ a<\frac{1}{2}$. Квадратное уравнение при $a\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \frac{1}{2})$ имеет два корня $x_{1,2}=\frac{1}{a^2}(1-a\pm\sqrt{1-2a})$. Оба корня положительные (это видно, например, из формул Виета: $x_1+x_2\ =\ \frac{2}{a^2}(1-a)>0,\ \ x_1x_2\ =\ \frac{1}{a^2}\ >\ 0$), однако условию $ax+1>0\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{a}(1\pm\sqrt{1-2a})>0$ при $a\in(0;\ \frac{1}{2})$ удовлетворяют оба корня, а при $a<0$ только $x_1=\frac{1}{a^2}(1-a-\sqrt{1-2a})$.

Остаётся выяснить, существуют ли значения $a\neq 0$, при которых корень квадратного уравнения равен $\frac{1}{2}$. Решим уравнение $\frac{1}{a^2}(1-a\pm\sqrt{1-2a})\ =\ \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \pm2\sqrt{1-2a}\ =\ a^2+2a-2\ \ (a\neq 0)$.

После возведения в квадрат левой и правой части получим $4-8a=a^4+4a^2+4+4a^3-4a^2-8a\ \Leftrightarrow\ a^4+4a^3=0$, откуда $a=0$ и $a=-4$. При $a=-4$ значение $\frac{1}{2}$ принимает только корень x_2, но x_2 не является решением исходного уравнения при $a<0$.

Ответ : $x=\frac{1}{a^2}(1-a-\sqrt{1-2a})$ при $a\in(-\infty;\ 0)$;
$x_{1,2}=\frac{1}{a^2}(1-a\pm\sqrt{1-2a})$ при $a\in(0;\ \frac{1}{2}]$; $\emptyset$ при $a\in\{0\}\cup(\frac{1}{2};\ +\infty)$.

11) На ОДЗ $(x-2a>0,\ b-a>0,\ b+a>0,\ x>0)$ имеем

$$\lg(x-2a)\ -\ \lg(b-a)\ =\ \lg(b+a)\ -\ \lg x\ \Leftrightarrow$$
$$\lg(x-2a)\ +\ \lg x\ =\ \lg(b+a)\ +\ \lg(b-a)\ \Leftrightarrow$$

$x(x-2a)\ =\ (b+a)(b-a)\ \Leftrightarrow\ x^2\ -\ 2ax+\ (a^2-b^2)\ =\ 0$, откуда $x_1\ =\ a-b,\ \ x_2\ =\ a+b$.

Очевидно, что $x_1\ =\ a\ -\ b$ не удовлетворяет условиям $b-a>0,\ x>0$, следовательно, не является решением исходного уравнения. Подстановкой убеждаемся, что $x_2=a+b$ является корнем исходного уравнения.

Ответ : $x=a+b$, если $a+b>0$ и $b-a>0$; $\emptyset$ если $a+b\leq 0$, или $b-a\leq 0$.

12) На ОДЗ $(a>0,\ x<2,\ x\neq 0)$ исходное уравнение равносильно уравнению $ax^2+2x-4=0$. Выясним, при каких $a>0$

корни $x_{1,2} = \frac{1}{a}(-1 \pm \sqrt{1+4a})$ принадлежат множеству $X = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 2)$. Так как $x_1 = -\frac{1}{a}(1 + \sqrt{1+4a}) < 0$, то $x_1 \in X$ при любом $a > 0$. Ясно, что $x_2 = \frac{1}{a}(\sqrt{1+4a} - 1) > 0$. Докажем, что $x_2 < 2$ при любом $a > 0$. Действительно, $x_2 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a}(\sqrt{1+4a} - 1) < 2 \Leftrightarrow \dfrac{4a}{a(\sqrt{1+4a})} < 2 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{1+4a} + 1$. Получили верное неравенство.

Ответ : $x_{1,2} = \frac{1}{a}(-1 \pm \sqrt{1+4a})$ при $a \in (0;\ +\infty)$.

13) На ОДЗ $(a \neq 0,\ a \neq \pm 1,\ x > a)$ имеем $\log_{a^2}(x-a) = \frac{1}{2}$ и $\log_{a^2}(x-a) = \frac{1}{4}$. Рассмотрим два случая.

1. $a < 0$. $\left[\begin{array}{l} \log_{a^2}(x-a) = \frac{1}{2} \\ \log_{a^2}(x-a) = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - a = -a \\ x - a = \sqrt{-a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a + \sqrt{-a}. \end{array}\right.$

2. $a > 0$. $\left[\begin{array}{l} \log_{a^2}(x-a) = \frac{1}{2} \\ \log_{a^2}(x-a) = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - a = a \\ x - a = \sqrt{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2a \\ x = a + \sqrt{a}. \end{array}\right.$

Ответ : $x_1 = 0$, $x_2 = a + \sqrt{-a}$ при $a \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0)$; $x_1 = 2a$, $x_2 = a + \sqrt{a}$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

14) Выполняя равносильные преобразования на области допустимых значений уравнения $(x > 0,\ x \neq 1,\ a > 0,\ a \neq 1)$, получим

$$\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_x a = 1 \Leftrightarrow$$

$\log_a x + \dfrac{1}{\log_a x} = 2 \Leftrightarrow \log_a^2 x - 2\log_a x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\log_a x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\log_a x = 1$, откуда $x = a$.

Ответ : $x = a$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Упражнения.

Решить уравнения

1) $\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1$,

2) $\log_{0,5}(x^2 - 2x + a) = -3$,

3) $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2}\left(\dfrac{a^2 - 4}{2a - x}\right) = 1$,

4) $a^{1+\log_3^2 x} + a^{1-\log_3^2 x} = a^2 + 1$,

5) $1 + \log_a(1-x) \cdot \log_x a = \dfrac{2}{\log_a x}$,

6) $3\lg^2(x-a) - 10\lg(x-a) + 3 = 0$,

7) $\log_a(ax)\log_x(ax) = \log_{a^2}\frac{1}{a}$,

8) $\lg(x-a) - \lg 2 = \frac{1}{2}\lg(x-b)$,

9) $\lg x + \lg(x-2a) - \lg(3x-4a) = \lg a$,

10) $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$.

§2. Условия существования решений

В этом параграфе рассмотрим примеры, в которых надо установить, при каких a

1) уравнение имеет решения или не имеет их,
2) корни уравнений удовлетворяют некоторым соотношениям.

Пример 1. При каких a уравнения

1) $|\log_3(x+2)| = -(x+a)^2$, **2)** $\log_a x + |a+\log_a x| \log_{\sqrt{x}} a = a\log_x a$,

3) $(1+(a+2)^2)\log_3(2x-x^2) + (1+(3a-1)^2)\log_{11}(1-\frac{x^2}{2}) =$
$= \log_3(2x-x^2) + \log_{11}(1-\frac{x^2}{2})$, **4)** $\log_{a-2}(\frac{17}{8} + \cos x - \sin\frac{x}{2}) = 3$,

5) $\log_2(\sqrt{a+2} - x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-a-1) = \log_4 9$, **6)** $\log_{\sqrt{2-x}}(4x+a) = 4$,

7) $\lg^2 \sin x - 2a\lg\sin x - a^2 + 2 = 0$ имеют решения ?

Решение.

1) Так как $|\log_3(x+2)| \geq 0$, а $-(x+a)^2 \leq 0$, то равенство возможно только в случае, когда $|\log_3(x+2)| = 0 = -(x+a)^2$, откуда $x = -1$, $a = 1$.

Ответ: $a = 1$.

2) С учётом ОДЗ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ x \neq 1)$, уравнение преобразуем следующим образом:
$\log_a x + |a+\log_a x| \cdot \frac{2}{\log_a x} = \frac{a}{\log_a x} \Leftrightarrow \log_a^2 x + 2|a+\log_a x| - a = 0.$

Рассмотрим два случая:

1. $a + \log_a x \geq 0$.

$\log_a^2 x + 2|a+\log_a x| - a = 0 \Leftrightarrow \log_a^2 x + 2\log_a x + a = 0$ и $\log_a x = -1 \pm \sqrt{1-a}$, $(0 < a < 1)$. Условию $a + \log_a x \geq 0 \Leftrightarrow a - 1 \pm \sqrt{1-a} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - a \leq \pm\sqrt{1-a} \Leftrightarrow \sqrt{1-a} \leq \pm 1$ удовлетворяет только $\log_a x = -1 + \sqrt{1-a}$.

2. $a + \log_a x < 0$.

$\log_a^2 x + 2|a+\log_a x| - a = 0 \Leftrightarrow \log_a^2 x - 2\log_a x - 3a = 0$, откуда $\log_a x = 1 \pm \sqrt{1+3a}$. Пусть $\log_a x = 1 - \sqrt{1+3a}$. Неравенство $a + \log_a x < 0 \Leftrightarrow a + 1 - \sqrt{1+3a} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+3a} > a+1 \Leftrightarrow 1 + 3a > a^2 + 2a + 1 \Leftrightarrow a^2 - a < 0$ выполняется при $a \in (0;\ 1)$.

Ответ: $a \in (0;\ 1)$.

3) После упрощения получим уравнение

$$(a+2)^2\log_3(2x-x^2) + (3a-1)^2\log_{11}(1-\frac{x^2}{2}) = 0.$$

Так как $2x - x^2 = 1-(1-x)^2 \leq 1$, то $\log_3(2x-x^2) \leq 0$. Аналогично, $1-\frac{x^2}{2} \leq 1$, поэтому $\log_{11}(1-\frac{x^2}{2}) \leq 0$. Сумма двух неположительных чисел может равняться нулю только в том случае, когда каждое слагаемое равно нулю. Первое слагаемое обращается в нуль при $a = -2$ или $x = 1$. Второе – при $a = \frac{1}{3}$ или $x = 0$. Но $x = 0$ не принадлежит ОДЗ уравнения $X = (0;\ \sqrt{2})$. Таким образом, уравнение имеет решение только при $a = \frac{1}{3}$ $(x = 1)$.

Ответ: $a = \frac{1}{3}$.

4) Найдём множество значений функции
$f(x) = \frac{17}{8} + \cos x - \sin\frac{x}{2} = \frac{17}{8} + 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = \frac{25}{8} - 2\sin^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$. Ясно, что $f(x) \geq \frac{25}{8} - 3 = \frac{1}{8}$. Наименьшее значение $\frac{1}{8}$ достигается при $\sin\frac{x}{2} = 1$. С другой стороны, $f(x) = \frac{25}{8} - 2(\sin^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{16}) + \frac{1}{8} = \frac{13}{4} - 2(\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{4})^2 \leq \frac{13}{4}$. Наибольшее значение $\frac{13}{4}$ достигается при $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{4}$. Так как f – непрерывная функция, то $E(f) = [\frac{1}{8};\ \frac{13}{4}]$. Исходное уравнение равносильно уравнению $f(x) = (a-2)^3$, $(a > 2,\ a \neq 3)$. Таким образом, уравнение будет иметь решения при значениях параметра a, удовлетворяющих условиям $\frac{1}{8} \leq (a-2)^3 \leq \frac{13}{4}$, $a > 2$, $a \neq 3$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} \leq a - 2 \leq \frac{\sqrt[3]{26}}{2}$, $a \neq 3$ $\Leftrightarrow$ $2\frac{1}{2} \leq a \leq 2 + \frac{\sqrt[3]{26}}{2}$, $a \neq 3$.

Замечание. Множество E(f) можно найти с помощью производной функции f.

Ответ: $a \in [2\frac{1}{2};\ 3) \cup (3;\ 2 + \frac{\sqrt[3]{26}}{2}]$.

5) $\log_2(\sqrt{a+2} - x) + \log_{\frac{1}{2}}(x - a - 1) = \log_4 9 \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{a+2} - x) =$

$$= \log_2(x - a - 1) + \log_2 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a+2} - x > 0 \\ x - a - 1 > 0 \\ \sqrt{a+2} - x = 3(x - a - 1). \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x = \frac{1}{4}(\sqrt{a+2} + 3a + 3)$.

Достаточно проверить выполнение одного из неравенств.
$\frac{1}{4}(\sqrt{a+2} + 3a + 3) > a + 1 \Leftrightarrow \sqrt{a+2} > a + 1$. Решая неравенство, получаем

Ответ: $a \in [-2;\ \frac{\sqrt{5}-1}{2})$.

6) На ОДЗ уравнения $(x < 2,\ x \neq 1,\ 4x + a > 0)$ имеем $\log_{\sqrt{2-x}}(4x+a) = 4 \Leftrightarrow 4x + a = (2-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 - a = 0$, откуда $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{12 + a}$. Корни квадратного уравнения существуют при

$a \geq -12$. Так как $x_1 = 4 + \sqrt{12+a} \geq 4$, то x_1 не удовлетворяет условию $x < 2$ и корнем исходного уравнения не является. Решая неравенство $x_2 < 2 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{12+a} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{12+a} > 2$, получим $a > -8$. Кроме того, надо исключить значение a, при котором $x_2 = 1$. $x_2 = 1 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{12+a} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{12+a} = 3 \Leftrightarrow a = -3$. Условие $4x + a > 0$ следует из равенства $4x + a = (2-x)^2$.

Замечание. Значения a можно было найти, решая неравенство $f(2) < 0$, где $f(x) = x^2 - 8x + 4 - a$.

Ответ: $a \in (-8;\ -3) \cup (-3;\ +\infty)$.

7) После замены $t = \lg \sin x \leq 0$ получим квадратное уравнение, корни которого $t_{1,2} = a \pm \sqrt{2(a^2-1)}$ существуют при $|a| \geq 1$. Ясно, что исходное уравнение будет иметь решения тогда и только тогда, когда меньший корень квадратного уравнения будет удовлетворять условию $t \leq 0$. Решая неравенство $a - \sqrt{2(a^2-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2(a^2-1)} \geq a$, получим

Ответ: $a \in (-\infty;\ -1] \cup [\sqrt{2};\ +\infty)$.

Пример 2. При каких a и b уравнение $1 + \log_b(2\lg a - x)\log_x b = \dfrac{2}{\log_b x}$ имеет решения ?

Решение. На ОДЗ уравнения $(0 < x < 2\lg a,\ \ x \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0,\ \ b \neq 1)$ имеем $1 + \dfrac{\log_b(2\lg a - x)}{\log_b x} = \dfrac{2}{\log_b x} \Leftrightarrow \log_b x + \log_b(2\lg a - x) = 2 \Leftrightarrow \log_b x(2\lg a - x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x\lg a + b^2 = 0$.

Корни квадратного уравнения существуют при условии $\frac{1}{4}D \geq 0 \Leftrightarrow \lg^2 a - b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lg a \geq b \Leftrightarrow a \geq 10^b$. Так как $x_1 + x_2 = 2\lg a > 0$, $x_1 x_2 = b^2 > 0$, то корни положительные и удовлетворяют условию $0 < x < 2\lg a$. Если $b = \lg a$, то уравнение имеет один положительный корень $x = \lg a$.

Ответ: $a \in [10^b;\ +\infty)$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Пример 3. Найти наибольшее значение a, при котором уравнение $2\log_2^2 x - |\log_2 x| + a = 0$ имеет решения.

Решение. После замены $|\log_2 x| = t$ задача свелась к нахождению наибольшего значения a, при котором квадратное уравнение $2t^2 - t + a = 0$ имеет неотрицательное решение. Из неравенства $D \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 8a \geq 0$ следует, что $a \leq \frac{1}{8}$. При $a = \frac{1}{8}$ квадратное уравнение имеет корень $t = \frac{1}{4} > 0$, следовательно, значение $a = \frac{1}{8}$ удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: $a = \frac{1}{8}$.

Пример 4. При каких a уравнения
1) $\log_{2x}(x+a) = 1$, **2)** $\log_{x^2-1}(x+a) = 1$,
3) $\log_{\frac{1}{3}}(9^x + a) + \log_3(2 \cdot 3^x) = 0$ не имеют решения?

Решение.

1) На ОДЗ уравнения ($x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x + a > 0$) имеем $\log_{2x}(x+a) = 1 \Leftrightarrow 2x = x+a \Leftrightarrow x = a$. $x = a$ не принадлежит ОДЗ в случае, если $a \in (-\infty;\ 0] \cup \{\frac{1}{2}\}$. При всех остальных значениях a исходное уравнение имеет решение.

Ответ: $a \in (-\infty;\ 0] \cup \{\frac{1}{2}\}$.

2) С учётом ОДЗ ($x + a > 0$, $|x| > 1$, $|x| \neq \sqrt{2}$) имеем $x^2 - 1 = x + a \Leftrightarrow f(x) = 0$, где $f(x) = x^2 - x - a - 1$. Исходное уравнение не будет иметь решений в следующих случаях:

1. Квадратное уравнение не имеет решений. Значения a находим из условия $D < 0 \Leftrightarrow 1 + 4(a+1) < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{5}{4}$.

2. Уравнение $f(x) = 0$ имеет корни, но они удовлетворяют условию $|x| \leq 1$. Значения a найдём из системы

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 \in [-1;\ 1] \\ f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \in [-1;\ 1] \\ 1 - a \geq 0 \\ -a - 1 \geq 0, \end{cases} \quad \text{откуда } a \in [-\tfrac{5}{4};\ -1].$$

3. Модуль одного из корней равен $\sqrt{2}$, а модуль другого не превосходит 1.

a) $x_1 = \sqrt{2}$. Так как $x_1 + x_2 = 1$, то $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, $|x_2| < 1$. Подставим $x = \sqrt{2}$ в уравнение $f(x) = 0$ и найдём соответствующее значение a. Имеем $2 - \sqrt{2} - a - 1 = 0$, откуда $a = 1 - \sqrt{2}$. Таким образом, при $a = 1 - \sqrt{2}$ исходное уравнение решений не имеет.

b) $x_1 = -\sqrt{2}$. В этом случае исходное уравнение имеет решение $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ -1] \cup \{1 - \sqrt{2}\}$.

3) $\log_{\frac{1}{3}}(9^x + a) + \log_3(2 \cdot 3^x) = 0 \Leftrightarrow \log_3(2 \cdot 3^x) = \log_3(9^x + a)$ $\Leftrightarrow 2 \cdot 3^x = 9^x + a$. После замены получим уравнение $f(t) = 0$, где $f(t) = t^2 - 2t + a$, $t = 3^x > 0$. Квадратное уравнение имеет корни $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$, причём $t = 1 + \sqrt{1-a} > 0$ при любом $a \leq 1$.

Это означает, что при $a \in (-\infty;\ 1]$ исходное уравнение имеет решения. Если же $a > 1$, то дискриминант квадратного уравнения $D = 1 - a < 0$, поэтому уравнение $f(t) = 0$, а вместе с ним и исходное, решений не имеют.

Ответ: $a \in (1;\ +\infty)$.

Пример 5. Найти все x, удовлетворяющие уравнению $\log_2(a^2x^3 - 5a^2x^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{2+a^2}(3 - \sqrt{x-1})$ при любом a.

Решение. Так как нам надо найти значения x, удовлетворяющие уравнению при любом a, то сначала решим уравнение при некотором фиксированном значении a, а затем проверим, будут ли найденные значения x решениями при любом a. Удобно взять $a = 0$. Получим уравнение $\log_2\sqrt{6-x} = \log_2(3 - \sqrt{x-1})$, корни которого $x = 2$ и $x = 5$.

1. $x = 2$. Левая часть уравнения $\log_2(2 - 12a^2) = \log_{2+a^2} 2$ не имеет смысла, если $2 - 12a^2 \le 0$, т.е. $x = 2$ не удовлетворяет условиям задачи.

2. $x = 5$. Равенство $\log_2(125a^2 - 125a^2 + 1) = \log_{2+a^2} 1$ справедливо при любом $a \in R$.

Ответ: $x = 5$.

Пример 6. При каких a расстояние между корнями уравнения $2\log_a x + 3\log_{ax^2} a + 5 = 0$ меньше $\frac{6}{25}$?

Решение. На ОДЗ уравнения $(x > 0,\ a > 0,\ a \ne 1,\ ax^2 \ne 1)$ перейдём к основанию a, получим
$2\log_a x + \frac{3}{\log_a ax^2} + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\log_a x + \frac{3}{1 + 2\log_a x} + 5 = 0 \Leftrightarrow$ $2\log_a x + 4\log_a^2 x + 8 + 10\log_a x = 0 \Leftrightarrow \log_a^2 x + 3\log_a x + 2 = 0$, откуда $\log_a x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$ и $\log_a x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a^2}$.

В задаче требуется определить, при каких a $\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\right| < \frac{6}{25}$.

Рассмотрим два случая.

1. $0 < a < 1$. $\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\right| < \frac{6}{25} \Leftrightarrow 25(1-a) < 6a^2 \Leftrightarrow$ $6a^2 + 25a - 25 > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty;\ -5) \cup (\frac{5}{6};\ +\infty)$. Принимая во внимание условие $0 < a < 1$, окончательно имеем $a \in (\frac{5}{6};\ 1)$.

2. $a > 1$. $\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\right| < \frac{6}{25} \Leftrightarrow 25(a-1) < 6a^2 \Leftrightarrow 6a^2 - 25a + 25 > 0 \Leftrightarrow$ $a \in (-\infty;\ \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{2};\ +\infty)$. Так как $a > 1$, то решение неравенства $a \in (1;\ \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{2};\ +\infty)$.

Ответ: $a \in (\frac{5}{6};\ 1) \cup (1;\ \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{2};\ +\infty)$.

Пример 7. При каких a сумма квадратов корней уравнения $2\log_a |x-1| - \log_a x = 1$ равна 34?

Решение. На ОДЗ уравнения $(x > 0,\ x \neq 1,\ a > 0,\ a \neq 1)$ имеем $2\log_a |x-1| - \log_a x = 1 \ \Leftrightarrow\ \log_a (x-1)^2 = \log_a ax \ \Leftrightarrow$ $(x-1)^2 = ax \ \Leftrightarrow\ x^2 - x(a+2) + 1 = 0$.

Воспользуемся формулами Виета.

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a+2)^2 - 2 = a^2 + 4a + 2$. Уравнение $a^2 + 4a + 2 = 34$ имеет два корня: $a_1 = -8$ и $a_2 = 4$. Первый корень не удовлетворяет условиям задачи, так как $-8 \notin (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. $a_2 = 4 \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ и при $a = 4$ дискриминант квадратного уравнения $x^2 - x(a+2) + 1 = 0$ $D = (a+2)^2 - 4 = 32 > 0$, т.е. корни x_1 и x_2 существуют.

Ответ: $a = 4$.

Пример 8. При каких a корни уравнения $(a-1)\log_3^2(x-2) - 2(a+1)\log_3(x-2) + a - 3 = 0$ меньше 3?

Решение. Если $x < 3$, то $x - 2 < 1$ и $\log_3(x-2) < 0$.

После замены $\log_3(x-2) = t$ условие задачи сформулируем следующим образом:

при каких a уравнение $(a-1)t^2 - 2(a+1)t + a - 3 = 0$ имеет только отрицательные корни?

Пусть $f(t) = (a-1)t^2 - 2(a+1)t + a - 3$.

1. При $a = 1$ получаем линейное уравнение $-4t - 2 = 0$, откуда $t = -\frac{1}{2} < 0$. Значение $a = 1$ удовлетворяет условиям задачи.

2. Значения a, при которых корни квадратного уравнения отрицательны, найдём из системы

$$\begin{cases} \frac{1}{4}D \geq 0 \\ t_0 < 0 \\ (a-1)f(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 - (a-1)(a-3) \geq 0 \\ \dfrac{a+1}{a-1} < 0 \\ (a-1)(a-3) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

откуда $a \in [\frac{1}{3};\ 1)$.

Объединяя найденные значения a, получим

Ответ: $a \in [\frac{1}{3};\ 1]$.

Упражнения.

Пример 1. При каких a уравнения

1) $(1 + (3a+4)^2)\log_2(-2x - x^2) + (1 + (a-2)^2)\log_7(1 - \frac{x^2}{3}) =$ $= \log_7(1 - \frac{x^2}{3}) + \log_2(-2x - x^2)$,

2) $\log_3(\sqrt{a+4}-x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-a-1)=\log_9 4$,

3) $\log_5(\sqrt{a+3}-x)+\log_{\frac{1}{5}}(x-a-2)=\log_{\sqrt{5}} 2$,

4) $\log_7(\sqrt{a+6}-x)+\log_{\frac{1}{7}}(x-a-2)=\log_{49} 4$,

5) $4^{\lg 3-\lg(a-x)}=(\frac{1}{2})^{\lg x+1}$, 6) $\lg 2x+\lg(2-x)=\lg\lg a$,

7) $\log_a \sqrt{4+x}+3\log_{a^2}(4-x)-\log_{a^4}(16-x^2)^2=2$,

8) $\log_2 x+\log_a x+\log_4 x=1$, 9) $\log_{a+1}(\frac{25}{8}+\cos x-2\sin\frac{x}{2})=3$,

10) $\log_{1-a}(2-\cos x+\sin\frac{x}{2})=2$, 11) $\log_{a-3}(5-3\cos x-6\sin\frac{x}{2})=2$

имеют решения ?

Пример 2. При каких a уравнения

1) $\log_{\frac{x}{2}}(a-x)=1$, 2) $9^{\lg(x-a)-\lg 2}=3^{\lg(x-1)}$ не имеют решения?

Пример 3. Найти все x, удовлетворяющие уравнению

1) $2\log_{3a^2+2}(7-\sqrt{34+x})=\log_{2a^2+3}(3-x)$,

2) $2\log_{2+a^2}(4-\sqrt{7+2x})=\log_{2+a^2x^2}(4-3x)$,

3) $\log_{x+a^2+1}(a^2x+2)=2\log_{7+2x}(5-\sqrt{6-2x})$

при любом a.

Пример 4. При каких a расстояние между корнями уравнения $\log_a x+8\log_{ax^3} x=3$ меньше $\frac{3}{2}$?

Пример 5. При каких a сумма квадратов корней уравнения $\log_a|x-2a|+\log_a x=2$ равна 4?

§3. Корни уравнения

Рассмотрим несколько примеров на определение значений параметра, при которых

1) уравнение имеет единственное решение,

два, три, четыре решения;

2) два уравнения равносильны.

Пример 1. При каких a уравнения

1) $2\lg(x+3) = \lg(ax)$, **2)** $\lg(x^2+6x+8) = \lg(a-3x)$,

3) $\lg(x^2+2ax) = \lg(8x-6a-3)$,

4) $\log_{\sqrt{ax+6}}(2x^2+2x+4) = 2\log_{ax+6}(x^2-3x-2)$,

имеют единственное решение?

Решение.

1) $2\lg(x+3) = \lg(ax) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 = ax \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x(6-a)+9=0 \\ x+3>0. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1. Квадратное уравнение имеет единственное решение. Значения a найдём из условия $D=0 \Leftrightarrow (6-a)^2-36=0$, откуда $a=0$ и $a=12$. При $a=0$ корень $x=-3 \notin (-3;\ +\infty)$. Значение $a=12$ удовлетворяет условиям задачи, так как корень уравнения $x=3 \in (-3;\ +\infty)$.

2. Уравнение $f(x)=0$, где $f(x)=x^2+x(6-a)+9$ имеет два корня, удовлетворяющих двойному неравенству $x_1 \le -3 < x_2$. Значения a найдём из условия $f(-3)<0 \Leftrightarrow 9-3(6-a)+9<0 \Leftrightarrow a<0$. При этих значениях a только корень x_2 является решением исходного уравнения. Случай $f(-3)=0 \Leftrightarrow a=0$ рассмотрен выше.

Ответ: $a \in (-\infty;\ 0) \cup \{12\}$.

2) На ОДЗ $(x \in X = (-\infty;\ -4) \cup (-2;\ +\infty),\ a-3x>0)$ $\lg(x^2+6x+8) = \lg(a-3x) \Leftrightarrow x^2+6x+8=a-3x \Leftrightarrow x^2+9x+8-a=0$.

Как и в предыдущем примере рассмотрим два случая:

1. $D=0 \Leftrightarrow 81-4(8-a)=0 \Leftrightarrow a=-\frac{49}{4}$. При этом значении a $x=-\frac{9}{2} \in X$, следовательно, $a=-\frac{49}{4}$ удовлетворяет условиям задачи.

2. Уравнение $f(x)=0$, где $f(x)=x^2+9x+8-a$ имеет два корня, но один из них не входит в ОДЗ первоначального уравнения, т.е. принадлежит отрезку $[-4;\ -2]$. Значения a, при которых ровно один корень уравнения $f(x)=0$ находится на интервале $(-4;\ -2)$, найдём из неравенства $f(-4)\cdot f(-2)<0 \Leftrightarrow (-12-a)(-6-a)<0 \Leftrightarrow$

$-12 < a < -6$. Исследуем корни уравнения $f(x) = 0$ при $a = -12$ и $a = -6$.

1) $a = -12$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+9x+20 = 0$, $x_1 = -5 \in X$, $x_2 = -4 \notin X$.

2) $a = -6$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+9x+14 = 0$, $x_1 = -7 \in X$, $x_2 = -2 \notin X$.

Таким образом, получаем

Ответ: $a \in [-12; -6] \cup \{-\frac{49}{4}\}$.

3) На ОДЗ $(x^2 + 2ax > 0,\ 8x - 6a - 3 > 0)$ уравнения $\lg(x^2 + 2ax) = \lg(8x - 6a - 3)$ и $x^2 + 2ax = 8x - 6a - 3$ равносильны, причём достаточно потребовать выполнения только одного условия, например, $8x - 6a - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{8}(2a+1)$.

Как и при решении предыдущих примеров рассмотрим два случая.

1. Уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = x^2 - 2x(4-a) + 6a + 3$ имеет единственное решение, если $\frac{1}{4}D = 0 \Leftrightarrow (4-a)^2 - (6a+3) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 14a + 13 = 0$, т.е. при $a = 1$ и $a = 13$. Легко проверить, что условие $x > \frac{3}{8}(2a+1) \Leftrightarrow 4 - a > \frac{3}{8}(2a+1)$ выполняется при $a = 1$ и не выполняется при $a = 13$.

2. Значения a, при которых только один из корней удовлетворяет условию $x > \frac{3}{8}(2a+1)$, найдём из неравенства $f(\frac{3}{8}(2a+1)) < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{64}(4a^2 + 4a + 1) - 2 \cdot \frac{3}{8}(2a+1)(4-a) + 6a + 3 < 0 \Leftrightarrow 44a^2 + 28a + 3 < 0 \Leftrightarrow a \in (-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22})$. Проверкой убеждаемся, что значения $a = -\frac{1}{2}$ и $a = -\frac{3}{22}$ удовлетворяют условиям задачи.

Ответ: $a \in [-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}] \cup \{1\}$.

4) На ОДЗ $(x^2+x+2 > 0,\ x^2-3x-2 > 0,\ ax+6 > 0,\ ax+6 \neq 1)$

$$\log_{\sqrt{ax+6}}(2x^2 + 2x + 4) = 2\log_{ax+6}(x^2 - 3x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\log_{ax+6}(2x^2 + 2x + 4) = \log_{ax+6}(x^2 - 3x - 2) \Leftrightarrow$$

$2x^2 + 2x + 4 = x^2 - 3x - 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = -2$. Легко проверить, что x_1 и x_2 удовлетворяют условиям $x^2 + x + 2 > 0$ и $x^2 - 3x - 2 > 0$.

Если x_1 – решение исходного уравнения, а x_2 не является решением, то должны выполняться следующие условия

$$\begin{cases} ax_1 + 6 > 0 \\ ax_1 + 6 \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} ax_2 + 6 \le 0 \\ ax_2 + 6 = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 6 > 0 \\ -3a + 6 \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} -2a + 6 \le 0 \\ -2a + 6 = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2 \\ a \neq \frac{5}{3} \\ \left[\begin{array}{l} a \ge 3 \\ a = \frac{5}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет.

Аналогично, значения a, при которых x_2 – решение исходного уравнения, а x_1 не является решением, найдём из системы

$$\begin{cases} ax_2+6>0 \\ ax_2+6\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} ax_1+6\leq 0 \\ ax_1+6=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+6>0 \\ -2a+6\neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} -3a+6\leq 0 \\ -3a+6=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<3 \\ a\neq \frac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a\geq 2 \\ a=\frac{5}{3}, \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда $a\in\{\frac{5}{3}\}\cup[2;\ \frac{5}{2})\cup(\frac{5}{2};\ 3)$.

Ответ: $a\in\{\frac{5}{3}\}\cup[2;\ \frac{5}{2})\cup(\frac{5}{2};\ 3)$.

Пример 2. При каких a уравнения

1) $x+\log_{\frac{1}{3}}(9^x-2a)=0$, **2)**$\log_4(2+\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{|x|}{x})+\frac{1}{2}(x-3)^2=a$

имеют ровно два решения?

Решение.

1) $x+\log_{\frac{1}{3}}(9^x-2a)=0 \Leftrightarrow \log_3(9^x-2a)=x \Leftrightarrow 9^x-3^x-2a=0.$

После введения обозначения $3^x=t$ получим квадратное уравнение $f(t)=0$, где $f(t)=t^2-t-2a$. Исходное уравнение будет иметь два решения, если уравнение $f(t)=0$ будет иметь два положительных корня. Значения a находим из системы

$$\begin{cases} D>0 \\ t_0>0 \\ f(0)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+8a>0 \\ \frac{1}{2}>0 \\ -2a>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{8}<a<0.$$

Замечание 1. Значения a можно найти, решая систему

$$\begin{cases} t_1>0 \\ t_2>0 \\ t_1\neq t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\sqrt{1+8a})>0 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+8a})>0 \\ 1+8a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{8}\leq a<0 \\ a\geq -\frac{1}{8} \\ a\neq -\frac{1}{8}, \end{cases}$$

откуда $a\in(-\frac{1}{8};\ 0)$.

Замечание 2. Уравнение имеет единственное решение при $a\in\{-\frac{1}{8}\}\cup[0;\ +\infty)$.

2) Упростим выражение, стоящее под знаком логарифма.

1. $x<0$. $\quad 2+\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{|x|}{x}=2-1+1=2.$

2. $0<x<2$. $\quad 2+\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{|x|}{x}=2-1-1=0.$

3. $x>2$. $\quad 2+\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{|x|}{x}=2+1-1=2.$

Таким образом, $\log_4(2 + \frac{|x-2|}{x-2} - \frac{|x|}{x}) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$ для $x \in X = (-\infty;\ 0) \cup\ (2;\ +\infty)$ и не существует при $x \in [0;\ 2]$.

Выясним теперь, при каких a уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = (x-3)^2 - 2a + 1 = x^2 - 6x - 2a + 10$, имеет два различных корня, принадлежащих множеству X.

Рассмотрим три случая:

1. $x_1,\ x_2 \in (-\infty;\ 0)$. Пусть $x_1 = 3 - \sqrt{2a-1}$, $x_2 = 3 + \sqrt{2a-1}$. Так как $x_2 > 0$, то этот случай невозможен.

2. $x_1 \in (-\infty;\ 0)$; $x_2 \in (2;\ +\infty)$. Значения a найдём из условия

$$\begin{cases} f(0) < 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 10 < 0 \\ 2 - 2a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 5 \\ a > 1, \end{cases} \quad \text{откуда } a \in (5; +\infty).$$

3. $x_1,\ x_2 \in (2;\ +\infty)$. Решая систему

$$\begin{cases} D > 0 \\ x_0 > 2 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 > 0 \\ 3 > 2 \\ 2 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ a < 1, \end{cases} \quad \text{получаем } a \in (\tfrac{1}{2};\ 1).$$

Осталось объединить найденные значения a.

Ответ: $a \in (\frac{1}{2};\ 1) \cup\ (5; +\infty)$.

Пример 3. Определить число корней уравнения
$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\lg\lg a - 1)\log_x 10$.

Решение. Если $a \le 1$, то $\lg\lg a$ не имеет смысла и уравнение не имеет решений. При $a > 1$ и $x \in (0;\ 1) \cup (1;\ 4)$ имеем $1 + \log_x(4-x) - \log_x 10 = (\lg\lg a)\log_x 10 - \log_x 10 \Leftrightarrow 1 + \frac{\lg(4-x)}{\lg x} = \frac{\lg\lg a}{\lg x} \Leftrightarrow x(4-x) = \lg a \Leftrightarrow x^2 - 4x + \lg a = 0$, откуда $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \lg a}$. Ясно, что корни существуют при условии $D \ge 0 \Leftrightarrow 4 - \lg a \ge 0 \Leftrightarrow a \ge 10^4$.

При $a = 10^4$ дискриминант равен нулю и уравнение имеет единственное решение $x_1 = x_2 = 2$.

При $a = 10^3$ корень $x_1' = 1$ не принадлежит ОДЗ. Уравнение имеет один корень $x_2 = 3$.

Если $a \in (1;\ 10^3) \cup (10^3;\ 10^4)$, то уравнение имеет два решения.

Ответ: $a \in (1;\ 10^3) \cup (10^3;\ 10^4)$ – два решения;
$a \in \{10^3;\ 10^4\}$ – одно решение; $a \in (10^4;\ +\infty)$ – решений нет.

Пример 4. При каких a уравнение
$9^{a^2}\log_2(|x^2 - 4x + 3| + 1) + 3^{3a-|x^2-4x+3|} \cdot \log_2 \frac{1}{1 + 3a - 2a^2} = 0$
имеет ровно три решения?

Решение. Выполняя тождественные преобразования на ОДЗ $(1+3a-2a^2>0)$, получим
$3^{2a^2}\log_2(|x^2-4x+3|+1)-3^{3a-|x^2-4x+3|}\cdot\log_2(1+3a-2a^2)=0 \Leftrightarrow$
$3^{|x^2-4x+3|}\log_2(|x^2-4x+3|+1)=3^{3a-2a^2}\log_2(1+3a-2a^2)=0.$

После введения обозначений $|x^2-4x+3|=u$, $3a-2a^2=v$, уравнение приведём к виду

$$3^u\log_2(u+1) = 3^v\log_2(v+1). \qquad (1)$$

Функция $f(t)=3^t\log_2(1+t)$ при $t>0$ является возрастающей (как произведение двух возрастающих функций, принимающих положительные значения), поэтому уравнение (1) равносильно уравнению
$u=v \Leftrightarrow |x^2-4x+3|=3a-2a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3-3a+2a^2=0 \\ x^2-4x+3+3a-2a^2=0. \end{array}\right.$
Первое уравнение совокупности имеет два решения $x_{1,2}=2\pm\sqrt{1+3a-2a^2}$ при любых значениях a из ОДЗ. Второе уравнение по условию задачи должно иметь единственный корень. Это возможно только в случае $\frac{1}{4}D=0 \Leftrightarrow 1-3a+2a^2=0$, т.е. при $a=\frac{1}{2}$ и $a=1$. Так как оба значения a входят в ОДЗ, то получаем

Ответ: $a=\frac{1}{2}$, $a=1$.

Пример 5. При каких a уравнение
$2\log_2^2 x-|\log_2 x|+2a=0$ имеет четыре решения?

Решение. После замены $|\log_2 x|=t\geq 0$ получаем уравнение $f(t)=0$, где $f(t)=2t^2-t+2a$. Исходное уравнение будет иметь 4 решения, если квадратное уравнение имеет 2 корня (различных и положительных). Значения a находим из системы

$$\begin{cases} D>0 \\ t_0>0 \\ f(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-16a>0 \\ \frac{1}{4}>0 \\ 2a>0, \end{cases} \quad \text{откуда } 0<a<\frac{1}{16}.$$

Замечание. При $a=0$ исходное уравнение имеет 3 корня.

Ответ: $a\in(0;\ \frac{1}{16})$.

Пример 6. Найти a, при которых уравнение

$$((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\lg a)\cdot\lg(\frac{36a-9a^2}{35})=0$$

имеет по крайней мере 2 корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит (-1).

Решение. ОДЗ уравнения найдём из системы

$$\begin{cases} 22a-4a^2-24\geq 0 \\ a>0 \\ 36a-9a^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in[\frac{3}{2};\ 4] \\ a\in(0;\ +\infty) \\ a\in(0;\ 4) \end{cases} \Leftrightarrow a\in[\frac{3}{2};\ 4).$$

Рассмотрим несколько случаев:

1. $\lg(\frac{36a-9a^2}{35})=0 \Leftrightarrow \frac{36a-9a^2}{35}=1 \Leftrightarrow 9a^2-36a+35=0,$ откуда $a=\frac{5}{3}$ и $a=\frac{7}{3}$. При этих значениях a множество решений уравнения $x\in R$ (среди них есть 2, удовлетворяющих условиям задачи).

2. $a=\frac{3}{2}$. Исходное уравнение $-2(x^2+x)\lg\frac{3}{2}=0$ имеет два корня, удовлетворяющих условиям задачи $(x_1=-1,\ x_2=0)$.

3. Преобразуем уравнение к виду $f(x)=0$, где $f(x)=2x^2\lg a+2x(\lg a-\sqrt{22a-4a^2-24})-a\sqrt{22a-4a^2-24}$. Значения a, при которых один из корней квадратного уравнения принадлежит промежутку $(-\infty;\ -1]$, а второй – промежутку $[0;\ +\infty)$, найдём из системы

$$\begin{cases} f(-1)\leq 0 \\ f(0)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)\sqrt{22a-4a^2-24}\leq 0 \\ -a\sqrt{22a-4a^2-24}\leq 0, \end{cases}$$

откуда $a\in\{\frac{3}{2}\}\cup[2;\ 4]$. С учётом ОДЗ уравнения получаем

Ответ: $a\in\{\frac{3}{2};\ \frac{5}{3}\}\cup[2;\ 4)$.

Пример 7. При каких $a,\ b,\ c,\ d$ уравнения
$xy=1$ и $axy+b\lg(\sqrt{x^2+1}+x)=c+d\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$ (1),(2)
равносильны?

Решение. Так как $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$, то $\lg(\sqrt{x^2+1}-x)=-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$, поэтому уравнение (2) можно преобразовать к виду

$$axy+(b+d)\lg(\sqrt{x^2+1}+x)=c. \qquad (3)$$

Легко видеть, что пары $(-1;\ -1)$ и $(1;\ 1)$ являются решениями уравнения (1). По условию они должны быть решениями уравнения (3). Подставляя значения x и y, получим систему

$$\begin{cases} a+(b+d)\lg(\sqrt{2}+1)=c \\ a+(b+d)\lg(\sqrt{2}-1)=c. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения почленно, придём к системе

$$\begin{cases} 2a+(b+d)(\lg(\sqrt{2}+1)+\lg(\sqrt{2}-1))=2c \\ (b+d)(\lg(\sqrt{2}+1)-\lg(\sqrt{2}-1))=0, \end{cases}$$

откуда находим, что $a=c,\ b=-d$. Подставим полученные значения параметров в уравнение (3). Имеем $axy=a$, откуда при $a\neq 0$

получим уравнение (1) $xy = 1$. Таким образом, уравнения (1) и (2) равносильны при $a = c \neq 0$, $b = -d$.

Упражнения.

Пример 1. При каких a уравнения

1) $2\lg(x+1) = \lg(ax)$, **2)** $2\lg(x+4) = \lg(ax)$,

3) $2\lg(x+5) = \lg(ax)$, **4)** $\log_4(ax-7) = 2\log_{16}(12x - x^2 - 32)$,

5) $\lg(x^2 - 6x + 8)^{\ln 10} = \ln(ax - 17)$,

6) $\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2 - x + 3) = 2\log_{2ax+4}(x^2 + 2x + 1)$,

7) $\log_{x-1}(x+a) = 0,5$, **8)** $\log_{x+1}(ax) = 2$,

9) $\log_{x-a}(\frac{3}{4}x^2 - x + a^2 - a) = 2$, **10)** $\log_2(5a - x) = \log_{0,5}(x-2)$

имеют единственное решение?

Пример 2. Найти наибольшее значение a, при котором уравнение имеет единственное решение.

1) $2\log_2(2x+3) = \log_2(ax)$, **2)** $\log_2(4x^2 + 4ax) = \log_2(16x - 6a - 3)$.

Пример 3. При каких a уравнения

1) $\log_2(4^x - a) = x$, **2)** $\log_3(9^x + 9a^3) = x$, **3)** $\log_2(4^x + 8a^5) = x$,

4) $x + \log_{\frac{1}{2}}(4^x + a^3) = 0$ имеют ровно два решения?

Пример 4. Определить число корней уравнения

1) $\log_9 x + \log_9 \frac{2-x}{2} = \log_9 \log_9 a$, **2)** $\log_3(2 + \frac{|x|}{x}) = (x+2)^2 + a$.

§4. Логарифмические неравенства

Приведём эквивалентности, используемые при решении логарифмических неравенств.

1. Неравенство $\log_{f(x)} g(x) \le \log_{f(x)} h(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$a)\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \le g(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad b)\begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \le h(x). \end{cases}$$

2. Если a, b – числа, $a > 0$, $a \ne 1$, то

$$\log_a f(x) \le b \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} f(x) \ge a^b, \text{ если } 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) \le a^b, \text{ если } a > 1, \end{array} \right.$$

$$\log_a f(x) > b \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} 0 < f(x) < a^b, \text{ если } 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b, \text{ если } a > 1. \end{array} \right.$$

Пример 1. Решить неравенства

1) $x^{\log_a x} < a$, **2)** $x^{|\log_x a|} \le \frac{1}{a}$, **3)** $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + a) > -3$,

4) $a^{4\log_x a} < a^3 x$, **5)** $\dfrac{1}{\log_a(x-3)} > 1$, **6)** $\log_{2x+3}(a-2) < 1$,

7) $\log_{\frac{a^2+3}{a^2+4}}(3x-5) \ge \log_{\frac{a^2+3}{a^2+4}}(x+8)$, **8)** $\dfrac{\log_a(35 - x^3)}{\log_a(5-x)} > 3$,

9) $\log_2(\sqrt{x^2 - 2ax + 1} - 1) \le 1$, **10)** $\log_a \dfrac{1 + \log_a^2 x}{1 - \log_a x} < 0$.

Решение.

1) ОДЗ неравенства: $x > 0$, $a > 0$, $a \ne 1$. Логарифмируем обе части неравенства по основанию a. Рассмотрим два случая:

1. $0 < a < 1$. $\log_a^2 x > \log_a a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a x > 1 \\ \log_a x < -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < a \\ x > \frac{1}{a}. \end{array} \right.$

2. $a > 1$. $\log_a^2 x < \log_a a \Leftrightarrow -1 < \log_a x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < x < a$.

Ответ: $x \in (0;\ a) \cup (\frac{1}{a};\ +\infty)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (\frac{1}{a};\ a)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

2) ОДЗ неравенства: $x > 0$, $x \ne 1$, $a > 0$. Если $a = 1$, то неравенство выполняется при любом x из ОДЗ. При $a \ne 1$ прологарифмируем обе части неравенства по основанию a и рассмотрим два случая:

1. $0 < a < 1$. $|\log_x a|\log_a x \geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_a x}{|\log_a x|} \geq -1$. Левая часть неравенства равна -1, если $\log_a x < 0 \Leftrightarrow x > 1$, и равна 1, если $\log_a x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Таким образом, неравенство справедливо при любом x из ОДЗ.

2. $a > 1$. $|\log_x a|\log_a x \leq -1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_a x}{|\log_a x|} \leq -1$. Неравенство выполняется только при $x \in (0;\ 1)$.

Ответ: $x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ при $a \in (0;\ 1]$; $x \in (0;\ 1)$ при $a \in (1:\ +\infty)$.

3) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + a) > -3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2x + a > 0 & (1) \\ x^2 - 2x + a < 8. & (2) \end{cases}$

Пусть X_1 и X_2 – множества решений неравенств (1) и (2) соответственно, тогда $X_1 \cap X_2 = X$ – решение исходного неравенства.

Корни квадратных трёхчленов $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$ и $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{9-a}$. Следовательно, критическими значениями параметра a являются $a = 1$ и $a = 9$.

При $0 < a < 1$ $X_1 = (-\infty;\ 1 - \sqrt{1-a}) \cup (1 + \sqrt{1-a}; +\infty)$, при $a > 1$ $X_1 = (-\infty;\ +\infty)$.

При $0 < a < 9$ $X_2 = (1 - \sqrt{9-a};\ 1 + \sqrt{9-a})$, при $a \geq 9$ $X_2 = \emptyset$.

Рассмотрим три случая:

1. $0 < a \leq 1$. $X = (1 - \sqrt{9-a};\ 1 - \sqrt{1-a}) \cup (1 + \sqrt{1-a};\ 1 + \sqrt{9-a})$.
2. $1 < a < 9$. $X = (1 - \sqrt{9-a}; 1 + \sqrt{9-a})$.
3. $a \geq 9$. $X = \emptyset$.

4) При $a = 1$ получим $1 < x$. Это означает, что исходное неравенство выполняется при $x \in (1;\ +\infty)$. При $a \neq 1$ прологарифмируем обе части неравенства по основанию a и рассмотрим два случая:

1. $0 < a < 1$. $a^{4\log_x a} < a^3 x \Leftrightarrow \dfrac{4}{\log_a x} > 3 + \log_a x \Leftrightarrow$

$$\frac{\log_a^2 x + 3\log_a x - 4}{\log_a x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_a x + 4)(\log_a x - 1)}{\log_a x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_a x < -4 \\ 0 < \log_a x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{a^4} \\ a < x < 1. \end{array}\right.$$

2. $a > 1$. $a^{4\log_x a} < a^3 x \Leftrightarrow \dfrac{4}{\log_a x} < 3 + \log_a x \Leftrightarrow$

$$\frac{\log_a^2 x + 3\log_a x - 4}{\log_a x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_a x + 4)(\log_a x - 1)}{\log_a x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} -4 < \log_a x < 0 \\ \log_a x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a^4} < x < 1 \\ x > a. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (a;\ 1) \cup (\frac{1}{a^4};\ +\infty)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (1;\ +\infty)$ при $a = 1$; $x \in (\frac{1}{a^4};\ 1) \cup (a;\ +\infty)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

5) ОДЗ неравенства: $x > 3,\ x \neq 4,\ a > 0,\ a \neq 1$.

$$\frac{1}{\log_a(x-3)} > 1 \ \Leftrightarrow\ 0 < \log_a(x-3) < 1.$$

Рассмотрим два случая:

1. $0 < a < 1$. $a < x - 3 < 1 \ \Leftrightarrow\ a + 3 < x < 4$.
2. $a > 1$. $1 < x - 3 < a \ \Leftrightarrow\ 4 < x < a + 3$.

Ответ: $x \in (a+3;\ 4)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (4;\ a+3)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

6) ОДЗ неравенства: $2x + 3 > 0,\ 2x + 3 \neq 1,\ a > 2$.

Рассмотрим два случая:

1. $0 < 2x + 3 < 1 \ \Leftrightarrow\ -\frac{3}{2} < x < -1$.

$\log_{2x+3}(a-2) < 1 \ \Leftrightarrow\ a - 2 > 2x + 3 \ \Leftrightarrow\ x < \frac{1}{2}(a-5)$.

Так как $a > 2$, то $\frac{1}{2}(a-5) > -\frac{3}{2}$, поэтому остаётся рассмотреть две возможности.

a) $\frac{1}{2}(a-5) < -1 \ \Leftrightarrow\ a < 3$. В этом случае множество решений неравенства $x \in (-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}(a-5))$.

b) $\frac{1}{2}(a-5) \geq -1 \ \Leftrightarrow\ a \geq 3$. Множество решений неравенства $x \in (-\frac{3}{2};\ -1)$.

2. $2x + 3 > 1 \ \Leftrightarrow\ x > -1$. Исходное неравенство равносильно неравенству $a - 2 < 2x + 3 \ \Leftrightarrow\ x > \frac{1}{2}(a-5)$. Сравним числа $\frac{1}{2}(a-5)$ и -1.

a) $\frac{1}{2}(a-5) \leq -1 \Leftrightarrow a \leq 3$. Множество решений $x > -1$.

b) $\frac{1}{2}(a-5) > -1 \ \Leftrightarrow\ a > 3$. В этом случае множество решений $x > \frac{1}{2}(a-5)$. Объединяя найденные множества, получим

Ответ: $x \in (-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}(a-5)) \cup (-1;\ +\infty)$ при $a \in (2;\ 3)$; $x \in (-\frac{3}{2};\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$ при $a = 3$; $x \in (-\frac{3}{2};\ -1) \cup (\frac{1}{2}(a-5);\ +\infty)$ при $a \in (3;\ +\infty)$.

7) Так как $0 < \dfrac{a^2+3}{a^2+4} < 1$ для любого $a \in R$, то $\log_{\frac{a^2+3}{a^2+4}}(3x-5) \geq \log_{\frac{a^2+3}{a^2+4}}(x+8) \ \Leftrightarrow\ 0 < 3x - 5 \leq x + 8 \ \Leftrightarrow$ $\frac{5}{3} < x \leq \frac{13}{2}$.

Ответ: $x \in (\frac{5}{3};\ \frac{13}{2}]$ при $a \in (-\infty;\ +\infty)$.

8) ОДЗ неравенства: $35 - x^3 > 0,\ 5 - x > 0,\ x \neq 4,\ a > 0,\ a \neq 1.$

Воспользуемся формулой перехода к новому основанию:

$\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}, \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0,\ b > 0,\ b \neq 1).$

Имеем $\dfrac{\log_a(35 - x^3)}{\log_a(5 - x)} > 3 \Leftrightarrow \log_{5-x}(35 - x^3) > 3 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 5 - x < 1 \\ 35 - x^3 > 0 \\ 35 - x^3 < (5 - x)^3 \end{cases} \\ \begin{cases} 5 - x > 1 \\ 35 - x^3 > (5 - x)^3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 < x < 5 \\ x < \sqrt[3]{35} \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 4 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \emptyset \\ x \in (2;\ 3). \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (2;\ 3)$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

9) $\log_2(\sqrt{x^2 - 2ax + 1} - 1) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x^2 - 2ax + 1} - 1 \leq 2.$

Решение примера сводится к решению системы иррациональных неравенств.

$$\begin{cases} 1 < \sqrt{x^2 - 2ax + 1} \\ \sqrt{x^2 - 2ax + 1} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2a) > 0 \\ a - \sqrt{a^2 + 8} \leq x \leq a + \sqrt{a^2 + 8}. \end{cases}$$

Ответ зависит от знака параметра a.

1. $a < 0$. $x \in [a - \sqrt{a^2 + 8};\ 2a) \cup (0;\ a + \sqrt{a^2 + 8}]$.
2. $a \geq 0$. $x \in [a - \sqrt{a^2 + 8};\ 0) \cup (2a;\ a + \sqrt{a^2 + 8}]$.

10) ОДЗ неравенства: $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ 1 - \log_a x > 0.$

Рассмотрим два случая:

1. $0 < a < 1$. $\log_a \dfrac{1 + \log_a^2 x}{1 - \log_a x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 + \log_a^2 x}{1 - \log_a x} > 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{\log_a x(\log_a x + 1)}{\log_a x - 1} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a x < -1 \\ 0 < \log_a x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{a} \\ a < x < 1. \end{array}\right.$$

2. $a > 1$. $\log_a \dfrac{1 + \log_a^2 x}{1 - \log_a x} < 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1 + \log_a^2 x}{1 - \log_a x} < 1.$

Решим каждое из неравенств.

2_1. $0 < \dfrac{1 + \log_a^2 x}{1 - \log_a x} \Leftrightarrow 1 - \log_a x > 0 \Leftrightarrow x \in (0;\ a).$

2_2. $\dfrac{1 + \log_a^2 x}{1 - \log_a x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_a x(\log_a x + 1)}{\log_a x - 1} > 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} -1 < \log_a x < 0 \\ \log_a x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} < x < 1 \\ x > a \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (\tfrac{1}{a};\ 1) \cup (a;\ +\infty).$$

Остаётся найти пересечение двух множеств.

$(0;\ a) \cap ((\frac{1}{a};\ 1) \cup (a;\ +\infty)) = (\frac{1}{a};\ 1)$ – решение исходного неравенства при $a > 1$.

Ответ: $x \in (a;\ 1)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (\frac{1}{a};\ 1)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

Пример 2. При каких значениях a неравенства

1) $\log_a \dfrac{2x^2 + ax - 4}{x^2 - x + 1} < \log_a 4$, **2)** $\log_{\frac{1}{a+1}} (x^2 + 2|a|) > 0$,

3) $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(ax^2 + 4x + a)$

выполняются при любых значениях $x \in R$?

Решение.

1) Рассмотрим два случая:

1. $0 < a < 1$. Так как $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, то

$$\log_a \frac{2x^2 + ax - 4}{x^2 - x + 1} < \log_a 4 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + ax - 4}{x^2 - x + 1} > 4 \Leftrightarrow$$
$$2x^2 + ax - 4 > 4x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - x(a + 4) + 8 < 0.$$

Ясно, что это неравенство не может выполняться для всех $x \in R$ (например, оно не выполняется при $x = 0$). Следовательно, значения $a \in (0;\ 1)$ не удовлетворяют условиям задачи.

2. $a > 1$. $\log_a \dfrac{2x^2 + ax - 4}{x^2 - x + 1} < \log_a 4 \Leftrightarrow 2x^2 - x(a + 4) + 8 > 0.$

Значения a найдём из условия $D < 0 \Leftrightarrow (a + 4)^2 - 64 < 0 \Leftrightarrow a^2 + 8a - 48 < 0$, откуда $a \in (-12;\ 4)$. С учётом того, что $a > 1$, получим

Ответ: $a \in (1;\ 4)$.

2) ОДЗ неравенства: $a > -1$, $a \neq 0$, $x \in R$.

Рассмотрим два случая:

1. $a > 0$. Основание логарифма $\dfrac{1}{a+1} < 1$, поэтому $\log_{\frac{1}{a+1}} (x^2 + 2|a|) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2|a| < 1$. Это неравенство не может выполняться при любых $x \in R$. Например, оно не выполняется при $x = \pm 1$.

2. $-1 < a < 0$. Исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 + 2|a| > 1$. Так как наименьшее значение левой части последнего неравенства равно $2|a|$ (оно достигается при $x = 0$), то для выполнения неравенства $x^2 + 2|a| > 1$ при любых $x \in R$ необходимо и достаточно, чтобы значения a удовлетворяли условию $2|a| > 1$. Учитывая, что $a \in (-1;\ 0)$, окончательно получаем $a \in (-1;\ -\frac{1}{2})$.

Ответ: $a \in (-1;\ -\frac{1}{2})$.

3) $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(ax^2 + 4x + a) \Leftrightarrow$
$\log_5(5x^2 + 5) \geq \log_5(ax^2 + 4x + a) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} ax^2 + 4x + a > 0 \\ 5x^2 + 5 \ge ax^2 + 4x + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + 4x + a > 0 \\ (5-a)x^2 - 4x + 5 - a \ge 0. \end{cases}$$

Для того чтобы оба неравенства выполнялись для любых $x \in R$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при x^2 были положительны, дискриминант первого трёхчлена – отрицателен, а второго – неположителен. Решая систему

$$\begin{cases} a > 0 \\ 5 - a > 0 \\ 4 - a^2 < 0 \\ 4 - (5-a)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < 5 \\ (a-2)(a+2) > 0 \\ (a-3)(a-7) \ge 0, \end{cases}$$ получим $a \in (2;\ 3]$.

Ответ: $a \in (2;\ 3]$.

Пример 3. При каких значениях a неравенство $\log_2(x^2 + ax + 1) > -1$ выполняется для любого $x < 0$?

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 + ax + 1 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + ax + \frac{1}{2} > 0$.

Задача свелась к нахождению a, при которых квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{2}$ принимает положительные значения при любом $x < 0$. Значения a можно найти из условий

$$\left[\begin{array}{l} D < 0 \\ \begin{cases} x_0 \ge 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 2 < 0 \\ \begin{cases} -\frac{a}{2} \ge 0 \\ \frac{1}{2} \ge 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} < a < \sqrt{2} \\ a \le 0, \end{array} \right.$$

откуда $a \in (-\infty;\ \sqrt{2})$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ \sqrt{2})$.

Пример 4. При каких a среди решений неравенства

$$\log_2(x-1) - \log_{\frac{1}{2}} \frac{|x-2|}{6-x} + \log_2 \frac{|x-4|(6-x)}{x-1} > a$$

содержится единственное целое число?

Решение. ОДЗ неравенства: $x - 1 > 0$, $x \ne 2$, $6 - x > 0$, $x \ne 4$, или иначе $x \in (1;\ 2) \cup (2;\ 4) \cup (4;\ 6)$. Ясно, что решениями могут быть только два целых числа: 3 или 5.

Обозначим левую часть неравенства через $f(x)$.

Так как по условию решением неравенства $f(x) > a$ должно быть только одно целое число, то значения a найдём, решив совокупность двух систем:

$$1)\ \begin{cases} f(3) > a \\ f(5) \le a \end{cases} \quad \text{и} \quad 2)\ \begin{cases} f(3) \le a \\ f(5) > a. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} f(3) > a \\ f(5) \le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \log_2 3 + \log_2 3 - 1 > a \\ 2 + \log_2 3 - 2 \le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a \ge \log_2 3. \end{cases}$

Первая система решений не имеет.

2) $\begin{cases} f(3) \le a \\ f(5) > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ a < \log_2 3, \end{cases}$ откуда $a \in [0;\ \log_2 3)$.

Ответ: $a \in [0;\ \log_2 3)$.

Пример 5. Решить неравенство $\log_a(x^2+x+2) < \log_a(2x^2-18)$, если известно, что оно удовлетворяется при $x = -3,5$.

Решение. ОДЗ неравенства: $x \in (-\infty;\ -3) \cup (3;\ +\infty)$, $a > 0$, $a \ne 1$. Подставим $x = -3,5$ в обе части неравенства, получим $\log_a((-3,5)^2 - 3,5 + 2) < \log_a(2(-3,5)^2 - 18) \Leftrightarrow \log_a(10,75) < \log_a(6,5)$, откуда следует, что $0 < a < 1$.

Осталось решить исходное неравенство при $a \in (0;\ 1)$.
$x^2 + x + 2 > 2x^2 - 18 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 5$. Учитывая ОДЗ, получаем

Ответ: $x \in (-4;\ -3) \cup (3;\ 5)$.

Пример 6. При каких a любое решение неравенства
$$\frac{\log_3(x^2 - 3x + 7)}{\log_3(3x+2)} < 1$$
является решением неравенства $x^2 + (5-2a)x - 10a \le 0$?

Решение. Так как $x^2 - 3x + 7 = (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{19}{4} > 0$, то
$$\frac{\log_3(x^2 - 3x + 7)}{\log_3(3x+2)} < 1 \Leftrightarrow \log_{3x+2}(x^2 - 3x + 7) < 1 \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 3x + 2 < 1 \\ x^2 - 3x + 7 > 3x + 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + 2 > 1 \\ 0 < x^2 - 3x + 7 < 3x + 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3} \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} -\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3} \\ 1 < x < 5. \end{array}\right.$$

Множество решений первого неравенства $X_1 = (-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3}) \cup (1;\ 5)$. Корни квадратного трёхчлена $x^2 + (5-2a)x - 10a$ $x_1 = 2a$, $x_2 = -5$. Ясно, что если $2a < -5$, то $X_1 \not\subset X_2 = (2a;\ -5)$. В случае $2a > -5$ $X_2 = (-5;\ 2a)$. Для включения $X_1 \subset X_2$ надо потребовать выполнения неравенства $5 \le 2a \Leftrightarrow a \ge 2,5$.

Ответ: $a \in [2,5;\ +\infty)$.

Пример 7. При каких a любое решение неравенства

$$\log_{2+\frac{x}{2}}(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x - 5) \geq 1$$

является решением неравенства $a^4x^2 - a^2x - 2 > 0$?

Решение. $\log_{2+\frac{x}{2}}(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 5) \geq 1 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2 + \frac{1}{2}x < 1 \\ 0 < \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 5 \leq 2 + \frac{x}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 2 + \frac{1}{2}x > 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 5 \geq 2 + \frac{x}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4 < x < -2 \\ x^2 - 3x - 10 > 0 \\ x^2 - 4x - 14 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2 \\ x^2 - 4x - 14 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-4;\ -2) \\ x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty) \\ x \in [2 - 3\sqrt{2}; 2 + 3\sqrt{2}] \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2;\ +\infty) \\ x \in (-\infty; 2 - 3\sqrt{2}] \cup [2 + 3\sqrt{2}; +\infty) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [2 - 3\sqrt{2}; -2) \\ x \in [2 + 3\sqrt{2}; +\infty). \end{array}\right.$$

Таким образом, множество решений первого неравенства $X_1 = [2 - 3\sqrt{2}; -2) \cup [2 + 3\sqrt{2}; +\infty)$. При $a = 0$ второе неравенство решений не имеет. При $a \neq 0$ множество решений $X_2 = (-\infty;\ -\frac{1}{a^2}) \cup (\frac{2}{a^2};\ +\infty)$. Для включения $X_1 \subset X_2$ требуется выполнение двух неравенств: $-2 \leq -\frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a^2 \geq \frac{1}{2}$ и $\frac{2}{a^2} < 2 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 > \frac{2}{2 + 3\sqrt{2}}$. Так как $\frac{2}{2 + 3\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$, то искомые значения $a \in (-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty)$.

Упражнения.

Пример 1. Решить неравенства

1) $x^{\log_a x} > a$, 2) $\log_a^2 x^2 > 1$, 3) $x^{\log_a x + 4} < a^4 x$,

4) $x^{\log_a x + 1} > a^9 x$, 5) $\frac{1}{\log_a x} > 1$, 6) $\log_x(a^2 + 1) < 0$,

7) $\log_{a^2}(x^2 + 2x) < 1$, 8) $\log_a(1 - x^2) \geq 1$, 9) $\frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1$,

10) $\frac{3\log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1$, 11) $(\log_2 x - 1)(\log_2 x + a) > 0$,

12) $\log_a^2 x - \log_a x \le 0$, 13) $\log_a x + 1 > 2\log_x a$, 14) $\log_{\frac{x}{a}} a > \log_{a^2 x} a^2$,

15) $\log_a x > 6\log_x a - 1$, 16) $\log_{\frac{a^2+3}{a^2+2}}(2x+3) \le \log_{\frac{a^2+3}{a^2+2}}(x+2)$,

17) $1 - \frac{1}{2}\lg(2x-a) > \frac{1}{2}\lg(3a-x)$, 18) $\sqrt{\log_a \frac{3-2x}{1-x}} < 1$,

19) $\log_a x > \sqrt{\frac{6}{(\log_a x - 1)\log_x a}}$, 20) $\log_a(x-1) + \log_a x > 2$,

21) $\log_x 10 - \frac{1}{2}\log_a 10 > 0$, 22) $\log_a \sqrt{3,5x - 1,5} \cdot \log_x a < 1$,

23) $2\log_4(x-a+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2a-3) \ge 2$,

24) $\lg x + \lg(x-2a) - \lg(3x-4a) > \lg a$.

Пример 2. При каких значениях a неравенства

1) $\log_a(x^2-2x+a) > 1$, 2) $1 - \log_{\frac{1}{7}}(x^2+1) \ge \log_7(ax^2+4x+a,)$

3) $x^2\left(2 - \log_2 \frac{a}{a+1}\right) + 2x\left(1 + \log_2 \frac{a}{a+1}\right) - 2\left(1 + \log_2 \frac{a}{a+1}\right) > 0$,

4) $\log_{a(a+2)}(|x|+3) > 1$

выполняются при любых значениях $x \in R$?

Пример 3. При каких значениях a неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x+a) < -1$ выполняется для любого $x > 0$?

Пример 4. При каких a среди решений неравенств

1) $\log_{\frac{1}{3}}(8-x) - \log_3 \frac{|x-7|}{(x-3)} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{|x-5|(x-3)}{3(8-x)} < a$,

2) $-\log_{\frac{1}{3}}(x-4) + \log_3 \frac{|x-5|}{(9-x)} + \log_3 \frac{|x-7|(9-x)}{(x-4)} > a$

содержится единственное целое число?

§5. Системы уравнений и неравенств

Пример 1. Решить системы

1) $\begin{cases}(\log_a xy-2)(\log_a \frac{4}{9})^{-1}=-1\\ x+y=5a,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(\frac{1}{81})^{8+\log_a x}>(\frac{1}{3})^{\log_a^2 x}\\ 0<x<1.\end{cases}$

3) $\begin{cases}\lg(x+y)=\lg x+\lg y\\ \lg(x+ay)=\lg x+2\lg y,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\log_{x-2}(2x^2-4x+y+1)=2\\ x+y-3=a-a^2,\end{cases}$

5) $\begin{cases}xy=4\\ (\log_a x)^2+(\log_a y)^2=\frac{5}{2}(\log_a 4)^2.\end{cases}$

Решение.

1) На ОДЗ системы $(a>0,\ a\neq 1,\ xy>0)$ имеем:

$$\begin{cases}\log_a xy-2=\log_a \frac{9}{4}\\ x+y=5a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_a xy=\log_a \frac{9}{4}a^2\\ x+y=5a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=\frac{9}{4}a^2\\ x+y=5a,\end{cases}$$

откуда $x_1=\frac{a}{2}$, $y_1=\frac{9a}{2}$; $x_2=\frac{9a}{2}$, $y_2=\frac{a}{2}$.

Ответ: $\{(\frac{a}{2};\ \frac{9a}{2}),\ (\frac{9a}{2};\ \frac{a}{2})\}$ при $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

2) Преобразуем первое неравенство.

$$(\tfrac{1}{3})^{4(8+\log_a x)}>(\tfrac{1}{3})^{\log_a^2 x} \Leftrightarrow \log_a^2 x-4\log_a x-32>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_a x<-4\\ \log_a x>8.\end{array}\right.$$

Рассмотрим два случая:

1. $0<a<1$. $\left[\begin{array}{l}\log_a x<-4\\ \log_a x>8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>a^{-4}\\ 0<x<a^8.\end{array}\right.$

Учитывая, что $0<x<1$, имеем $0<x<a^8$.

2. $a>1$. $\left[\begin{array}{l}\log_a x<-4\\ \log_a x>8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<a^{-4}\\ x>a^8.\end{array}\right.$

Так как $0<x<1$, то получаем $0<x<a^{-4}$.

Ответ: $x\in(0;\ a^8)$ при $a\in(0;\ 1)$; $x\in(0;\ a^{-4})$ при $a\in(1;\ +\infty)$.

3) На ОДЗ системы $(x>0,\ y>0,\ x+ay>0)$ имеем:

$$\begin{cases}x+y=xy\\ x+ay=xy^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x(y-1)\\ ay=x(y^2-1).\end{cases}$$

Условие $x+ay>0$ выполняется, так как $x+ay=xy^2>0$. Если $y=1$, то система решений не имеет. При $y\neq 1$ поделим левые и правые части уравнений, получим $a=y+1$, откуда

$y = a-1,\ a-1 = x(a-2)$. При $a = 2$ последнее уравнение решений не имеет. Из условий $x > 0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{a-2} > 0,\ y > 0 \Leftrightarrow a-1 > 0$ получаем, что исходная система имеет решения при $a > 2$.

Ответ: $(\frac{a-1}{a-2};\ a-1)$ при $a \in (2;\ +\infty)$; $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ 2]$.

4) При $x > 2,\ x \neq 3$ имеем $2x^2-4x+y+1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2+y = 3$. Очевидно, что условие $2x^2-4x+y+1 > 0$ выполняется. Исключив y, получим квадратное уравнение, корни которого $x = a$ и $x = 1-a$. Установим теперь, при каких a корни уравнения удовлетворяют условиям $x > 2,\ x \neq 3$.

1. $x = a$ является решением при $a > 2,\ a \neq 3$.
2. $x = 1-a > 2 \Leftrightarrow a < -1;\ 1-a \neq 3 \Leftrightarrow a \neq -2$.

Итак, система имеет следующие решения: $(a;\ 3-a^2)$ при $a \in (2;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; $(1-a;\ 2+2a-a^2)$ при $a \in (-\infty;\ -2)\cup(-2;\ -1)$. При остальных a система решений не имеет.

5) На ОДЗ системы $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0)$ имеем:

$$\begin{cases} \log_a x + \log_a y = \log_a 4 \\ (\log_a x)^2 + (\log_a y)^2 = \frac{5}{2}(\log_a 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = c \\ u^2 + v^2 = \frac{5}{2}c^2, \end{cases}$$

где $u = \log_a x,\ v = \log_a y,\ c = \log_a 4$.

Система имеет два решения: $(-\frac{c}{2};\ \frac{3c}{2})$ и $(\frac{3c}{2};\ -\frac{c}{2})$.

Возвращаясь к первоначальным переменным x и y, получим $\log_a x = -\frac{1}{2}\log_a 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2},\ \log_a y = \frac{3}{2}\log_a 4 \Leftrightarrow y = 8$. В силу симметричности вместе с парой $(\frac{1}{2};\ 8)$ решением системы является пара $(8;\ \frac{1}{2})$.

Ответ: $\{(\frac{1}{2};\ 8),\ (8;\ \frac{1}{2})\}$ при $a \in (0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

Пример 2. При каких a следующие системы

1) $\begin{cases} \lg(1-y) = \lg(-x) \\ y + a + 3 = 0,5(x+a)^2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = a \\ 2 + \log_2 y = \log_2(1 + \frac{2}{x}), \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \frac{x^2}{a} \\ \lg(3+x) = \lg(1+y), \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + \log_2 y = 4 \\ y + 2^x = a + 4, \end{cases}$

5) $\begin{cases} (a-2)\sin x + \cos y = 1 \\ \log_a(2\cos y) = \log_a z \cdot \log_z(1 + 7\sin x) \\ \log_z(\frac{a}{5-a}) = 1 \end{cases}$ имеют решения?

Решение.

1) $\begin{cases} \lg(1-y)=\lg(-x) \\ y+a+3=0,5(x+a)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-y=-x, \quad x<0 \\ y+a+3=0,5(x+a)^2. \end{cases}$

Исключим y, получим квадратное уравнение $x+1+a+3=0,5(x+a)^2 \Leftrightarrow x^2+2x(a-1)+a^2-2a-8=0$, корни которого $x_1=4-a$, $x_2=-2-a$.

Условиям задачи удовлетворяют те значения a, при которых по крайней мере один корень отрицательный. Решая совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 4-a<0 \\ -2-a<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>4 \\ a>-2, \end{array}\right.$ получим

Ответ: $a \in (-2;\ +\infty)$.

2) После упрощений получим систему $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(a-y) \\ 4y=1+\frac{2}{x}, \quad y>0. \end{cases}$

Исключая x, придём к уравнению $f(y)=0$, где $f(y)=4y^2-y(4a+1)+a+4$. Условиям задачи удовлетворяют те значения a, при которых уравнение $f(y)=0$ имеет не менее одного положительного решения.

Рассмотрим несколько случаев.

1. Уравнение имеет корни противоположных знаков. Значения a найдём из условия $f(0)<0 \Leftrightarrow a+4<0 \Leftrightarrow a<-4$. При $a=-4$ уравнение не имеет положительных решений $(y_1=0,\ y_2=-\frac{15}{4})$.

2. Уравнение имеет два положительных корня. Решая систему

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ y_0>0 \\ f(0)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4a+1)^2-16(a+4) \geq 0 \\ \frac{1}{8}(4a+1)>0 \\ a+4>0, \end{cases}$$

получим $a \in [\frac{9}{4};\ +\infty)$. При $a=\frac{9}{4}$ уравнение имеет два равных положительных корня $y_1=y_2=\frac{5}{4}$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ -4) \cup [\frac{9}{4};\ +\infty)$.

Замечание 1. Корни уравнения $y_{1,2}=\frac{1}{8}(4a+1 \pm \sqrt{16a^2-8a-63})$.

Значения a можно найти из условия $y_2>0$, где $y_2=\frac{1}{8}(4a+1+\sqrt{16a^2-8a-63})$ – больший корень уравнения.

Замечание 2. Можно исключить y, получить квадратное уравнение относительно x и найти значения a, при которых существует решение, принадлежащее множеству $(-\infty;\ -2) \cup (0;\ +\infty)$. Решить эту задачу можно двумя способами:

а) использовать утверждения, касающиеся взаимного расположения корней квадратного уравнения, б) непосредственно найти корни квадратного уравнения и решать иррациональные неравенства.

3) $\begin{cases} y = \frac{x^2}{a} \\ \lg(3+x) = \lg(1+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{a}, \; a \neq 0 \\ 3 + x = 1 + y, \quad x > -3. \end{cases}$

Исключая y, получим квадратное уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = x^2 - ax - 2a$.

Как и в предыдущем примере рассмотрим два случая:

1. Корни квадратного уравнения лежат по разные стороны от числа -3.

Значения a находим из условия $f(-3) < 0 \Leftrightarrow a < -9$. При $a = -9$ уравнение $x^2 + 9x + 18 = 0$ имеет корни $x_1 = -6$, $x_2 = -3$, ни один из которых не удовлетворяет условию $x > -3$.

2. Оба корня уравнения лежат правее числа -3.

Значения a находим из системы

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 > -3 \\ f(-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 8a \geq 0 \\ \frac{1}{2}a > -3 \\ 9 + a > 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $a \neq 0$, получаем

Ответ: $a \in (-\infty; \; -9) \cup (0; \; +\infty)$.

Замечание. Значения a можно найти, решая неравенство $\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 8a}) > -3$, (больший корень лежит правее числа -3).

4) Выразим x из первого уравнения и подставим во второе. Получим квадратное уравнение $y^2 - (a+4)y + 16 = 0$. Корни уравнения y_1 и y_2 существуют, если $D \geq 0 \Leftrightarrow (a+4)^2 - 64 \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; \; -12] \cup [4; \; +\infty)$. При этих значениях a $y_1 y_2 = 16$, $y_1 + y_2 = a + 4$. Ясно, что корни имеют одинаковые знаки и положительными они будут при $a \in [4; \; +\infty)$. При $a = 4$ $y_1 = y_2 = 4$.

Ответ: $a \in [4; \; +\infty)$.

5) Из последнего уравнения находим $z = \frac{a}{5-a}$, причём $a > 0$, $a \neq 1$, $\frac{a}{5-a} > 0$, и так как $z \neq 1$, то $\frac{a}{5-a} \neq 1 \Leftrightarrow a \neq \frac{5}{2}$. Таким образом, $a \in (0; \; 1) \cup (1; \; \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}; \; 5)$.

Во втором уравнении перейдём к основанию a.

$$\log_a(2\cos y) = \log_a z \cdot \frac{\log_a(1 + 7\sin x)}{\log_a z} \Leftrightarrow$$

$$\log_a(2\cos y) = \log_a(1 + 7\sin x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos y = 1 + 7\sin x \\ \cos y > 0, \; \sin x > -\frac{1}{7}. \end{cases}$$

Решим систему $\begin{cases}(a-2)\sin x+\cos y=1\\ 7\sin x-2\cos y=-1,\end{cases}$ получим $\sin x=\frac{1}{2a+3}$, $\cos y=\frac{a+5}{2a+3}$. Осталось учесть ограничения

$$\begin{cases}-\frac{1}{7}\le\sin x\le 1\\ 0<\cos y\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{7}\le\frac{1}{2a+3}\le 1\\ 0<\frac{a+5}{2a+3}\le 1.\end{cases}$$

Первое двойное неравенство выполняется при любых $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ \frac{5}{2})\cup(\frac{5}{2};\ 5)$, второе - при $a\in[2;\ +\infty)$.

Ответ: $a\in[2;\ \frac{5}{2})\cup(\frac{5}{2};\ 5)$.

Пример 3. При каких a системы

1) $\begin{cases}y+\ln\frac{|y|}{y}=x\\ y+2(x+a)^2=x+2a+4,\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}y=\log_2(1+\frac{x}{|x|})\\ (x-a)^2+(y-a)^2=1,\end{cases}$

3) $\begin{cases}z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0\\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x\\ (x+y+a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-xy)+1)=0,\end{cases}$

имеют единственное решение?

Решение.

1) Из первого уравнения имеем:
$\frac{|y|}{y}>0\ \Rightarrow\ y>0\ \Rightarrow\ \ln\frac{|y|}{y}=\ln 1=0\ \Rightarrow\ y=x,\ x>0.$

Подставим значение $y=x$ во второе уравнение, получим уравнение $f(x)=0$, где $f(x)=x^2+2ax+a^2-a-2$.

Уравнение $f(x)=0$ может иметь единственное положительное решение в трёх случаях:

1. Уравнение имеет единственный корень.
$\frac{1}{4}D=0\ \Leftrightarrow\ a+2=0\ \Leftrightarrow\ a=-2$. Значение $a=-2$ удовлетворяет условиям задачи, так как $x=-a=2>0$.

2. Уравнение имеет два корня противоположных знаков. ($D>0$ и $x_1x_2<0$.) Значения a найдём из неравенства $x_1x_2<0\ \Leftrightarrow$ $f(0)<0\ \Leftrightarrow\ a^2-a-2<0\ \Leftrightarrow\ a\in(-1;\ 2)$.

3. Один корень равен 0, второй положителен. $f(0)=0\ \Leftrightarrow$ $a^2-a-2=0$, откуда $a=-1$ и $a=2$. Проверим оба значения.

3_1. $a=-1$. $x^2-2x=0$, $x_1=0$, $x_2=2>0$. Значение $a=-1$ удовлетворяет условиям задачи.

3_2. $a=2$. $x^2+4x=0$, $x_1=0$, $x_2=-4<0$, следовательно, $a=2$ не удовлетворяет условиям задачи.

Объединяя найденные значения a, получаем

Ответ: $a \in \{-2\} \cup [-1;\ 2)$.

2) $\log_2(1+\frac{x}{|x|})$ не существует при $x \le 0$. При $x > 0$ из первого уравнения находим $y = \log_2 2 = 1$.

Подставим значение $y = 1$ во второе уравнение, получим квадратное уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 2a$.

Исходная система уравнений будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно один положительный корень. Это возможно в трёх случаях:

1. $D = 0$ и при этом корень уравнения $x = a$ положителен.
$\frac{1}{4}D = 0 \Leftrightarrow a^2 - (2a^2 - 2a) = 0 \Leftrightarrow 2a - a^2 = 0 \Leftrightarrow a(a-2) = 0$.
Указанному условию удовлетворяет значение $a = 2$.

2. $D > 0$ и уравнение имеет корни x_1, x_2 разных знаков.
По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 2a < 0$, откуда $a \in (0;\ 1)$.

3. Один корень уравнения равен нулю, а второй положителен.
Подставив $x_1 = 0$ в уравнение $f(x) = 0$, получим $2a^2 - 2a = 0$, откуда $a = 0$ и $a = 1$. Если $a = 0$, то $x_2 = 0$. При $a = 1$ $x_2 = 2 > 0$. Условиям задачи удовлетворяет $a = 1$.

Объединяя найденные значения a, получим

Ответ: $a \in (0;\ 1] \cup \{2\}$.

3) Все уравнения симметричны относительно x и y, т.е. при замене x на y и y на x система остаётся без изменения. Это означает, что если (x_0, y_0, z_0) – решение системы, то и (y_0, x_0, z_0) – решение системы. Поэтому для единственности решения необходимо, чтобы $x_0 = y_0$.

Положим $x = y$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} (2+x^2)\sin 2x = 0 \\ 2(x-1)^2 + z^2 = a + 1 \\ (2x + a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-x^2) + 1) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $\sin 2x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi k$, $k \in Z$. Из этого множества значений только $x = 0$ удовлетворяет условию $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1$.

При $x = 0$ два последних уравнения системы запишутся в виде

$$\begin{cases} z^2 = a - 1 \\ a\sin^2 z = 0. \end{cases}$$

Так как $f(z) = z^2$ и $g(z) = a\sin^2 z$ – чётные функции, то для единственности решения необходимо, чтобы $z = 0$, откуда следует, что $a = 1$.

Теперь надо проверить, действительно ли при $a = 1$ система имеет единственное решение $x = y = z = 0$.

Система принимает вид:

$$\begin{cases} z\cos(x-y) + (2+xy)\sin(x+y) - z = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1 + 2x \\ x + y + \sin^2 z = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения исключим $x+y = -\sin^2 z$ и подставим во второе уравнение. Получим уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2\sin^2 z = 0$, которое имеет единственное решение $x = y = z = 0$.

Ответ: $a = 1$.

Пример 4. При каких a система

1) $\begin{cases} 2 + \log_2 y = \log_2(x+3y) \\ y = x + 2a - 4 + 2(x-a)^2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_x y = 1 \\ y = x^2 - 7x + a \end{cases}$

имеет два различных решения?

Решение.

1) Преобразуем первое уравнение

$$2 + \log_2 y = \log_2(x+3y) \Leftrightarrow \log_2 4y = \log_2(x+3y) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y > 0. \end{cases}$$

Подставим значение $y = x$ во второе уравнение, получим $(x-a)^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + a - 2 = 0$.

Остаётся выяснить, при каких a последнее уравнение имеет два различных положительных корня.

Значения a найдём из условий

$$\begin{cases} \frac{1}{4}D > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2 > 0 \\ a^2 + a - 2 > 0 \\ 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty;\ 2) \\ a \in (-\infty;\ -2) \cup (1;\ +\infty) \\ a \in (0;\ +\infty), \end{cases}$$

откуда $a \in (1;\ 2)$.

Замечание. Так как $x_1, x_2 = a \pm \sqrt{2-a}$, то значения a можно найти, решая неравенство

$$x_1 > 0 \Leftrightarrow a - \sqrt{2-a} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 2 > 0 \\ 2 - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (1;\ 2].$$

Значение $a = 2$ исключаем, поскольку при $a = 2$ корни уравнения совпадают и система имеет единственное решение.

Ответ: $a \in (1;\ 2)$.

2) Из первого уравнения следует, что $y = x$, $x > 0$, $x \neq 1$. Подставим значение $y = x$ во второе уравнение. Получим квадратное уравнение $x^2 - 8x - a = 0$.

Для решения задачи надо установить, при каких a последнее уравнение имеет два различных положительных корня, отличных от 1.

Корни уравнения $x_1, x_2 = 4 \pm \sqrt{16 + a}$ существуют и различны при $a > -16$. Ясно, что $x_2 = 4 + \sqrt{16 + a}$ удовлетворяет условиям задачи.

Искомые значения a найдём из системы

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \sqrt{16 + a} > 0 \\ 4 - \sqrt{16 + a} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{16 + a} < 4 \\ \sqrt{16 + a} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq a < 0 \\ a \neq -7. \end{cases}$$

Учитывая, что $a > -16$, получаем

Ответ: $a \in (-16;\ -7) \cup (-7;\ 0)$.

Пример 5. При каких α система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2\sin^2(\pi x) - 3\sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi\alpha) = 0 \\ \cos(\pi xy) - \frac{3}{2}\sin^2(\pi x) - 2\sin^2(\pi y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi\alpha) = 0 \\ \log_2\left(1 + 4\sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{4} - \frac{\pi}{16}\right) - x^2 - y^2\right) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

Решение. Умножая второе уравнение на -2 и складывая с первым, получим $(\cos(\pi xy) - 1)^2 + \sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) = 0$.

Поскольку сумма неотрицательных слагаемых равна нулю, то каждое слагаемое равно нулю. Из системы

$$\begin{cases} \cos(\pi xy) = 1 \\ \sin(\pi x) = 0 \\ \sin(\pi y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi xy = 2\pi m \\ \pi x = \pi k \\ \pi y = \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2m,\ m \in Z \\ x = k,\ k \in Z \\ y = n,\ n \in Z \end{cases}$$

следует, что x и y – целые числа, причём по крайней мере одно из них чётно. При найденных значениях x и y уравнения системы принимают вид $\operatorname{tg}(\pi\alpha) = 1$, откуда $\pi\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi s \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} + s$, $s \in Z$. Подставим значение $\frac{\pi\alpha}{4} - \frac{\pi}{16} = \frac{\pi s}{4}$ в неравенство системы. Получим $\log_2\left(1 + 4\sin^2\frac{\pi s}{4} - x^2 - y^2\right) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $0 < 1 + 4\sin^2\frac{\pi s}{4} - k^2 - n^2 \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < 3 - 2\cos\frac{\pi s}{2} - k^2 - n^2 \leq \sqrt{2}$.

Рассмотрим следующие случаи:

1. $s = 2r + 1$, $r \in Z$. Решениями неравенства

$0 < 3 - k^2 - n^2 \le \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; 3 - \sqrt{2} \le k^2 + n^2 < 3$ являются пары $(\pm 1;\ \pm 1)$, не удовлетворяющие условию $kn = 2m$.

2. $s = 4r$, $r \in Z$. Неравенство $0 < 3 - 2 - k^2 - n^2 \le \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; 1 - \sqrt{2} \le k^2 + n^2 < 1$ имеет единственное решение $(0;\ 0)$.

3. $s = 4r + 2$, $r \in Z$. Имеем $0 < 3 + 2 - k^2 - n^2 \le \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; 5 - \sqrt{2} \le k^2 + n^2 < 5$. Четыре пары $(\pm 2;\ 0)$, $(0;\ \pm 2)$ удовлетворяют условиям задачи. $\alpha = \frac{1}{4} + s = \frac{1}{4} + 4r + 2 = \frac{9}{4} + 4r$, $r \in Z$.

Ответ: $\alpha = \frac{9}{4} + 4r$, $r \in Z$.

Упражнения.

Пример 1. Решить систему

1) $\begin{cases} a^x b^y = ab \\ 2\log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \log_{\sqrt{a}} b, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = a^2 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \frac{5}{2}\lg^2 a^2, \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \\ x + y = a^2 + a, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_{a^2} x - \log_{a^4} y = 1 \\ \log_{a^6} x + \log_{a^8} y = 2, \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_a(1 + \frac{x}{y}) = 2 - \log_a y \\ \log_a x + \log_a y = 4. \end{cases}$

Пример 2. При каких a система

1) $\begin{cases} y + x = 3 \\ \lg y = \lg(1 - \frac{x^2}{a}), \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg(4 + y) = \lg x \\ a - y = 0,5(x + a)^2, \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2 y + \log_2(x + 1) = 2 \\ y = a - 4x, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_2 y + \log_2(1 - x) = 2 \\ y = a + 4x, \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_a x\ (\frac{1}{\log_x 3} + \log_3 y) = \log_3 x \\ \log_3 x \cdot \log_2(x + y) = 2\log_2 x, \end{cases}$

6) $\begin{cases} a\sin x + (1 - 2a)\cos y = 2 \\ \log_a(1 - 2\sin x) = \log_a z \cdot \log_z \cos y \\ \log_z(\frac{a}{10 - a}) = 1, \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2\cos x + a\sin y = 1 \\ \log_z \sin y = \log_z a \cdot \log_a(2 - 3\cos x) \\ \log_a z + \log_a(\frac{1}{2a} - 1) = 0, \end{cases}$

8) $\begin{cases} a\cos y + \sin x + 1 = 0 \\ \log_z(-1 - 4\sin x) = \log_z a \cdot \log_a(1 + 2\cos y) \\ \log_a z + \log_a(\frac{4-a}{a}) = 0 \end{cases}$

имеют решения?

Пример 3. При каких a система

1) $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ \log_2(4x + y + 3a) - \log_2(x + y) = 2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg y = \lg\left(1 + \frac{4}{x}\right) \\ 4x + y = a \end{cases}$

имеет единственное решение?

Пример 4. При каких a система

$$\begin{cases} y = \frac{x+4}{x} \\ \log_2 y - \log_2(a - x) = 2 \end{cases}$$

имеет: а) единственное решение; б) ровно два решения?

Пример 5. При каких a система

$$\begin{cases} \sin(3(a - y)) + 3\sin x = 0 \\ 2\log_4(a - y) + 2\log_4(2\sqrt{y}) = \log_2\sqrt{y} + 3\log_8(2x) \end{cases}$$

имеет чётное число решений?

§6. Задачи единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике

Рассмотрим решения задач с параметрами, которые предлагались на едином государственном экзамене в 2002 - 2003 годах.

Пример 1. Найти все значения p, при которых уравнение
$$9\cdot 5^x(5^{2x}-0,5\cdot 5^{x+1}) = p - 5(12\cdot 5^{x-1}+1)$$
имеет: а) единственный корень, б) ровно два корня, в) не менее двух корней, г) ровно три корня, д) не имеет корней, е) или не имеет корней, или имеет единственный корень (имеет не более одного корня).

Решение. После замены переменной $5^x = t > 0$ получим уравнение $f(t) = p$, где $f(t) = 9t^3 - 22,5t^2 + 12t + 5$.

Найдём промежутки возрастания и убывания функции f при $t > 0$. Производная $f'(t) = 27t^2 - 45t + 12 = 3(3t-1)(3t-4)$ обращается в нуль при $t_1 = \frac{1}{3}$ и $t_2 = \frac{4}{3}$.

Так как функция f непрерывна, то она принимает все промежуточные значения. Легко убедиться в том, что

1) на промежутке $(0;\ \frac{1}{3}]$ f возрастает и $E(f) = (5;\ 6\frac{5}{6}]$;

2) на промежутке $[\frac{1}{3};\ \frac{4}{3}]$ f убывает и $E(f) = [2\frac{1}{3};\ 6\frac{5}{6}]$;

3) на промежутке $[\frac{4}{3};\ +\infty)$ f возрастает и $E(f) = [2\frac{1}{3};\ +\infty)$.

Остаётся выяснить, сколько раз функция f принимает различные значения p. Ясно, что уравнение $f(t) = p_0$ имеет ровно k решений, если функция f принимает значение p_0 ровно k раз.

1. $p \in (-\infty;\ 2\frac{1}{3})$. Уравнение не имеет решений, так как эти значения p не принадлежат множеству $E(f)$.

2. $p \in \{2\frac{1}{3}\} \cup (6\frac{5}{6};\ +\infty)$. Уравнение имеет единственное решение.

3. $p \in (2\frac{1}{3};\ 5] \cup \{6\frac{5}{6}\}$. Уравнение имеет ровно два решения.

4. $p \in (5;\ 6\frac{5}{6})$. Уравнение имеет ровно три решения.

Замечание. При определении количества решений уравнения $f(t) = p$ удобно воспользоваться эскизом графика функции f при $t > 0$.

Ответ: а) $p \in \{2\frac{1}{3}\} \cup (6\frac{5}{6};\ +\infty)$, б) $p \in (2\frac{1}{3};\ 5] \cup \{6\frac{5}{6}\}$; в) $p \in (2\frac{1}{3};\ 5] \cup \{6\frac{5}{6}\} \cup (5;\ 6\frac{5}{6}) = (2\frac{1}{3};\ 6\frac{5}{6}]$; г) $p \in (5;\ 6\frac{5}{6})$; д) $p \in (-\infty;\ 2\frac{1}{3})$; е) $p \in (-\infty;\ 2\frac{1}{3}) \cup \{2\frac{1}{3}\} \cup (6\frac{5}{6};\ +\infty) = (-\infty;\ 2\frac{1}{3}] \cup (6\frac{5}{6};\ +\infty)$.

Пример 2. Найти все значения p, при которых уравнение
$$2\cdot 7^{3x}-2=3(49^x+\frac{4}{49}\cdot 7^{x+2})-p$$
или не имеет корней, или имеет единственный корень (имеет не более одного корня).

Решение. Сделаем замену переменной $7^x=t>0$. Получим уравнение $f(t)=-p$, где $f(t)=2t^3-3t^2-12t-2$.

Как и в предыдущем примере найдём производную, критические точки, промежутки убывания и возрастания функции f.

$f'(t)=6t^2-6t-12=6(t+1)(t-2)$, $t=-1\notin(0;\ +\infty)$.

На промежутке $(0;\ 2]$ f убывает и $E(f)=(-2;\ -22]$, на промежутке $[2;\ +\infty)$ f возрастает и $E(f)=[-22;\ +\infty)$.

Уравнение $f(t)=-p$ не имеет корней, если $-p\in(-\infty;\ -22)$, т.е. при $p\in(22;\ +\infty)$.

Уравнение $f(t)=-p$ имеет единственное решение, если $-p\in\{-22\}\cup[-2;\ +\infty)$, т.е. при $p\in(-\infty;\ 2]\cup\{22\}$.

Объединяя эти множества, получим те значения p, при которых уравнение имеет не более одного корня.

Ответ: $p\in(-\infty;\ 2]\cup[22;\ +\infty)$.

Пример 3. Из области определения функции
$y=\log_6\left(a^{\frac{6x+2}{x-3}}-a^a\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a, при которых такая сумма будет двузначным числом, меньшим 21.

Решение. По определению логарифма область определения $D(y)$ состоит из решений неравенства $a^{\frac{6x+2}{x-3}}-a^a>0$.

1. $a\in(0;\ 1)$. Показательная функция с основанием a убывает, поэтому
$$a^{\frac{6x+2}{x-3}}>a^a\ \Leftrightarrow\ \frac{6x+2}{x-3}<a. \tag{1}$$
Если $x>3$, то $\frac{6x+2}{x-3}=6+\frac{20}{x-3}>6>a$. Неравенство (1) решений не имеет.

Целых положительных $x<3$ всего два: числа 1 и 2. Их сумма $1+2=3$ не является двузначным числом. Это означает, что значения $a\in(0;\ 1)$ условиям задачи не удовлетворяют.

2. При $a=1$ получаем неравенство, не имеющее решений.

3. $a\in(1;\ +\infty)$. Показательная функция с основанием a возрастает, следовательно
$$a^{\frac{6x+2}{x-3}}>a^a\ \Leftrightarrow\ \frac{6x+2}{x-3}>a. \tag{2}$$

При $0 < x < 3$ неравенство (2) не выполняется. Так как по условию надо найти целые положительные x, то $x \geq 4$. В этом случае $\frac{6x+2}{x-3} > a \Leftrightarrow 6x+2 > ax-3a \Leftrightarrow 3a+2 > x(a-6)$.

Ясно, что при $a \leq 6$ $D(y)$ содержит бесконечное множество целых положительных x, их сумма не может быть меньше 21. При $a > 6$ имеем $x < \frac{3a+2}{a-6}$. Сумма $4+5+6=15$ удовлетворяет условиям задачи, а суммы $4+5=9<10$, $4+5+6+7>21$, $4+5+6+7+8, \ldots$ не удовлетворяют. Следовательно, область определения функции должна содержать только три целых числа: 4, 5, 6. Поэтому $6 < \frac{3a+2}{a-6} \leq 7 \Leftrightarrow 6a-36 < 3a+2 \leq 7a-42$, откуда $a \in [11;\ 12\frac{2}{3})$.

Ответ: $a \in [11;\ 12\frac{2}{3})$.

Пример 4. Из области определения функции $y = \lg\left(a^a - a^{\frac{6x+5}{x+4}}\right)$ взяли все целые положительные числа и перемножили их. Найдите все положительные значения a, при которых такое произведение делится на 2, но не делится на 4.

Решение. Как и в предыдущем примере рассмотрим 3 случая:

1. $a \in (0;\ 1)$. $a^a - a^{\frac{6x+5}{x+4}} > 0 \Leftrightarrow a < \frac{6x+5}{x+4}$. Так как $a < 1$, то последнее неравенство выполняется для всех $x > 0$. Следовательно, $D(y)$ содержит все натуральные числа, поэтому значения $a \in (0;\ 1)$ условиям задачи не удовлетворяют.

2. При $a = 1$ неравенство решений не имеет.

3. $a \in (1;\ +\infty)$. По условию $x > 0$, поэтому $a^a - a^{\frac{6x+5}{x+4}} > 0 \Leftrightarrow a > \frac{6x+5}{x+4} \Leftrightarrow ax+4a > 6x+5 \Leftrightarrow 4a-5 > x(6-a)$. Значения $a \geq 6$ не удовлетворяют условиям задачи, поскольку неравенство выполняется для всех $x > 0$. Пусть $a < 6$, тогда $x < \frac{4a-5}{6-a}$. Область определения функции должна содержать число 2 и не содержать число 4. Решая неравенство $2 < \frac{4a-5}{6-a} \leq 4$, получаем

Ответ: $a \in (2\frac{5}{6};\ 3\frac{5}{8}]$.

Пример 5. Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y = \ln\left(x^{(x+5)\log_x a} + (\sqrt{x})^{10} \cdot a^4 - x^{5+x\log_x a} - (a^6)^{\log_4 8}\right)$$

содержит ровно два целых числа.

Решение. Сначала преобразуем выражение, стоящее под знаком логарифма. На области допустимых значений $(x > 0,\ x \neq 1,\ a > 0)$ имеем

$$
\begin{aligned}
&x^{(x+5)\log_x a} + (\sqrt{x})^{10} \cdot a^4 - x^{5+x\log_x a} - (a^6)^{\log_4 8} = \\
&= x^{\log_x a^{(x+5)}} + x^5 \cdot a^4 - x^5 \cdot x^{\log_x a^x} - (a^6)^{\frac{3}{2}} = \\
&= a^{(x+5)} + x^5 \cdot a^4 - x^5 \cdot a^x - a^9 = \\
&= a^x(a^5 - x^5) + a^4(x^5 - a^5) = (x^5 - a^5)(a^4 - a^x).
\end{aligned}
$$

Под знаком логарифма может стоять только положительное число, поэтому должно выполняться неравенство $(x^5-a^5)(a^4-a^x) > 0$, которое равносильно совокупности двух систем:

$$
\left[
\begin{array}{ll}
\begin{cases} x^5 > a^5 \\ a^4 > a^x \end{cases} & (3) \\
\begin{cases} x^5 < a^5 \\ a^4 < a^x. \end{cases} & (4)
\end{array}
\right.
$$

1) Сначала исключим случай $a = 1$. Так как при $a = 1$ имеем $a^4 - a^x = 0$, то неравенство $(x^5 - a^5)(a^4 - a^x) > 0$ решений не имеет, т.е. такое значение a не удовлетворяет условию.

При рассмотрении других случаев надо учитывать, что функция $f(x) = x^5$ возрастает, а функция $g(x) = a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

2) Пусть $0 < a < 1$. В этом случае

$$
\begin{cases} x^5 > a^5 \\ a^4 > a^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4,
$$

$$
\begin{cases} x^5 < a^5 \\ a^4 < a^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < a,
$$

т.е. множество решений системы (3): $x \in (4;\ +\infty)$, а множество решений системы (4): $x \in (0;\ a)$. Область определения функции y $D(y) = (0;\ a) \cup (4;\ +\infty)$ содержит бесконечно много целых чисел. Такие значения a не удовлетворяют условию задачи.

3) Пусть $a > 1$.

$$
\begin{cases} x^5 > a^5 \\ a^4 > a^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x < 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^5 < a^5 \\ a^4 < a^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ x > 4. \end{cases}
$$

Очевидно, что при $a < 4$ $D(y) = (a;\ 4)$. Интервал $(a;\ 4)$ содержит ровно два целых числа (1 и 2), если $a \in (1;\ 2)$.

При $a = 4$ $D(y) = \emptyset$.

Если же $a > 4$, то $D(y) = (4;\ a)$. Интервал $(4;\ a)$ содержит ровно два целых числа (5 и 6), если $a \in (6;\ 7]$.

Объединяя все рассмотренные случаи, получаем

Ответ: $a \in (1;\ 2) \cup (6;\ 7]$.

Замечание. При решении задачи удобно использовать ось ox, отметив на ней критические значения $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$, и рассмотреть различные случаи расположения параметра a. Можно также использовать систему координат xoa.

Пример 6. Найти все значения a, при которых область определения функции $y = \log_{10-a}\left(\ln \dfrac{a-3x}{2x+a}\right)$ содержит отрезок длиной 4, состоящий из отрицательных чисел.

Решение. Основание логарифма $10-a$ удовлетворяет условиям $10 - a > 0$ и $10 - a \neq 1$, откуда $a \in (-\infty;\ 9) \cup (9;\ 10)$.

Поскольку выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, то

$$\ln \frac{a-3x}{2x+a} > 0 \Leftrightarrow \frac{a-3x}{2x+a} > 1 \Leftrightarrow \frac{-5x}{2x+a} > 0.$$

По условию $x < 0$, поэтому $2x + a > 0$ и $x > -\frac{a}{2}$. Для того, чтобы промежуток $(-\frac{a}{2};\ 0)$ содержал отрезок длиной 4, надо потребовать выполнение неравенства $-\frac{a}{2} < -4 \Leftrightarrow a > 8$. С учётом ограничений на a получаем

Ответ: $a \in (8;\ 9) \cup (9;\ 10)$.

Пример 7. При каких значениях a сумма $\log_a\left(\dfrac{3+2x^2}{1+x^2}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{5+4x^2}{1+x^2}\right)$ будет больше единицы при всех значениях x?

Решение. Пусть $t = \dfrac{1}{1+x^2}$, тогда $\dfrac{3+2x^2}{1+x^2} = 2 + t$, $\dfrac{5+4x^2}{1+x^2} = 4 + t$, $\log_a(2+t) + \log_a(4+t) = \log_a(8 + 6t + t^2)$.

Функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ непрерывна на всей числовой оси, $\varphi(x) > 0$, $\max\varphi(x) = \varphi(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$, поэтому $E(\varphi) = (0;\ 1]$.

При $0 < a < 1$ приходим к неравенству $\log_a(8 + 6t + t^2) > 1 \Leftrightarrow 8 + 6t + t^2 < a$, которое решений не имеет.

При $a > 1$ получаем неравенство $8 + 6t + t^2 > a$. Оно справедливо для любого $a \in (1;\ 8]$ и любого $t \in (0;\ 1]$. Пусть $a > 8$, $a = 8 + h$, $h > 0$. Тогда $8 + 6t + t^2 > a \Leftrightarrow 6t + t^2 > h$. Ясно, что при $t \to 0$ это неравенство выполняться не будет.

Ответ: $a \in (1;\ 8]$.

Пример 8. При каких значениях a сумма $\log_a\left(\dfrac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ не равна единице ни при каких значениях x?

Решение. Пусть $t=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$, $x\geq 0$. Тогда $\dfrac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=2+t$, $\dfrac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=3+t$, $\log_a(2+t)+\log_a(3+t)=\log_a(6+5t+t^2)$. Функция $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ непрерывна при $x\geq 0$, $\varphi(x)>0$, $\max\varphi(x)=\varphi(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, поэтому $E(\varphi)=(0;\ 1]$.

Выясним теперь, при каких значениях $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$ уравнение $\log_a(6+5t+t^2)=1 \Leftrightarrow t^2+5t+6-a=0$ не имеет решений при $t\in(0;\ 1]$. Пусть $f(t)=t^2+5t+6-a$. Абсцисса вершины параболы $t_0=-\frac{5}{2}<0$, ветви параболы направлены вверх, поэтому искомые значения a находим из совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(0)\geq 0\\ f(1)<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-a\geq 0\\ 12-a<0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\leq 6\\ a>12.\end{array}\right.$$

Учитывая, что $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$, получаем

Ответ: $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ 6]\cup(12;\ +\infty)$.

Замечание. Очевидно, что только бо́льший корень уравнения $f(t)=0$ $t_1=\frac{1}{2}(-5+\sqrt{1+4a})$ может принадлежать промежутку $(0;\ 1]$. Искомые значения a можно найти, решая совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} t_1\leq 0\\ t_1>1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+4a}\leq 5\\ \sqrt{1+4a}>7,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+4a\leq 25\\ 1+4a>49,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\leq 6\\ a>12.\end{array}\right.$$

Пример 9. При каких значениях a сумма $\log_a(\sin x+2)$ и $\log_a(\sin x+3)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

Решение. Пусть $t=\sin x$, $t\in[-1;\ 1]$. Тогда $\log_a(\sin x+2)+\log_a(\sin x+3)=1 \Leftrightarrow \log_a(t^2+5t+6)=1 \Leftrightarrow t^2+5t+6-a=0 \Leftrightarrow f(t)=0$, где $f(t)=t^2+5t+6-a$. Так как $t_0=-\frac{5}{2}<-1$, то уравнение $f(t)=0$ не может иметь два корня на отрезке $[-1;\ 1]$. Для существования единственного решения уравнения $f(t)=0$ на отрезке $[-1;\ 1]$ необходимо и достаточно выполнение условия $f(-1)\cdot f(1)\leq 0$.

Решая неравенство $f(-1)\cdot f(1)\leq 0 \Leftrightarrow (2-a)(12-a)\leq 0$, получаем

Ответ: $a\in[2;\ 12]$.

Замечание. Искомые значения a можно получить из условия $-1 \le t_1 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{1}{2}(\sqrt{1+4a}-5) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le \sqrt{1+4a}-5 \le 2 \Leftrightarrow 3 \le \sqrt{1+4a} \le 7 \Leftrightarrow 9 \le 1+4a \le 49 \Leftrightarrow 8 \le 4a \le 48 \Leftrightarrow 2 \le a \le 12$, где t_1 – бо́льший корень уравнения $f(t)=0$.

Пример 10. При каких a выражение $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше выражения $0,2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ при всех допустимых значениях x?

Решение. Так как $1-|x|$ стоит под знаком логарифма, то $|x|<1$ и $\log_{25}(1+x^2-2|x|) = \log_{25}(1-|x|)^2 = \log_5(1-|x|)$.

Приведём оба выражения к основанию 5.

$(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|} = (5^{\log_5(1-|x|)})^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$,

$0,2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)} = 5^{a^2-4+\log_5(1-|x|)}$.

Введём переменную $t = \log_5(1-|x|)$. Функция $t=\varphi(x) = \log_5(1-|x|)$ непрерывна при $x \in (-1;\ 1)$, $\varphi(x) \le 0$, $\max\varphi(x) = \varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm1}\varphi(x) = -\infty$, поэтому $E(\varphi) = (-\infty;\ 0]$.

Сравнивая выражения $(5^t)^{t-|a-1|} > 5^{a^2-4+t} \Leftrightarrow t^2 - t|a-1| > a^2-4+t$, получаем неравенство

$$t^2 - t(|a-1|+1)+4-a^2 > 0. \qquad (5)$$

Так как абсцисса вершины параболы $t_0 = \frac{1}{2}(|a-1|+1) > 0$, ветви параболы направлены вверх, то неравенство (5) будет выполняться при всех $t \le 0$ тогда и только тогда, когда $4-a^2>0 \Leftrightarrow |a|<2$.

Ответ: $a \in (-2;\ 2)$.

Пример 11. При каких a выражение $(\sin x)^{\lg(\sin x)-a^2}$ больше выражения $10^{\log_{100}(1-\cos^2 x)+\log_7 a}$ при всех допустимых значениях x?

Решение. Так как $\sin x$ стоит под знаком логарифма, то $\sin x > 0$ и $\log_{100}(1-\cos^2 x) = \lg(\sin x)$, $x \in (2k\pi;\ (2k+1)\pi)$, $k \in Z$.

Приведём первое выражение к основанию 10.

$$(\sin x)^{\lg(\sin x)-a^2} = (10^{\lg(\sin x)})^{\lg(\sin x)-a^2}.$$

Введём переменную $t = \lg(\sin x)$. Функция $t=\varphi(x) = \lg(\sin x)$ непрерывна на любом интервале $(2k\pi;\ (2k+1)\pi)$, $k \in Z$. $\varphi(x) \le 0$, $\max\varphi(x) = \varphi(2k\pi + \frac{1}{2}\pi) = 0$, $\lim\limits_{x\to k\pi}\varphi(x) = -\infty$, поэтому $E(\varphi) = (-\infty; 0]$.

Сравнивая выражения

$(10^t)^{t-a^2} > 10^{t+\log_7 a} \Leftrightarrow t^2 - a^2 t > t + \log_7 a$, приходим к неравенству

$$t^2 - t(a^2+1) - \log_7 a > 0. \qquad (6)$$

Так как абсцисса вершины параболы $t_0 = \frac{1}{2}(a^2+1) > 0$, ветви параболы направлены вверх, то неравенство (6) будет выполняться при всех $t \le 0$ в том и только том случае, когда $-\log_7 a > 0 \Leftrightarrow \log_7 a < 0$, откуда $a \in (0;\ 1)$.

Ответ: $a \in (0;\ 1)$.

Пример 12. При каких a выражение $2+\cos x(3\cos x + a\sin x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

Решение. Преобразуем выражение $2+\cos x(3\cos x + a\sin x) =$

$$2+3\cos^2 x + a\sin x\cos x = \frac{1}{2}(7+3\cos 2x + a\sin 2x) =$$

$$\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{9+a^2}\left(\frac{3\cos 2x}{\sqrt{9+a^2}}+\frac{a\sin 2x}{\sqrt{9+a^2}}\right)\right) = \frac{1}{2}(7+\sqrt{9+a^2}\sin(2x+\varphi)),$$

где $\sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{9+a^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{9+a^2}}$. Так как $|\sin(2x+\varphi)| \le 1$, то уравнение $\frac{1}{2}(7+\sqrt{9+a^2}\sin(2x+\varphi)) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x+\varphi)) = \dfrac{-7}{\sqrt{9+a^2}}$ не имеет решений в том и только том случае, когда

$$\left|\frac{-7}{\sqrt{9+a^2}}\right| > 1 \Leftrightarrow \sqrt{9+a^2} < 7 \Leftrightarrow a^2 < 40 \Leftrightarrow |a| < 2\sqrt{10}.$$

Ответ: $a \in (-2\sqrt{10};\ 2\sqrt{10})$.

Замечание. Значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями уравнения

$2+\cos x(3\cos x + a\sin x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + a\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 0$, так как левая часть равна 2, а правая – 0. После деления на $\cos^2 x$ придём к квадратному уравнению $2t^2+at+5=0$, где $t = \operatorname{tg} x$, $t \in (-\infty;\ +\infty)$. Это уравнение не имеет решений при условии $D < 0 \Leftrightarrow a^2 - 40 < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{10} < a < 2\sqrt{10}$.

Пример 13. При каких a выражение $2+\cos x(5\cos x + a\sin x)$ будет равно 1 хотя бы при одном значении x?

Решение. Как и в предыдущем примере приведём уравнение $2+\cos x(5\cos x + a\sin x) = 1$ к виду $t^2+at+6=0$, где $t = \operatorname{tg} x$, $t \in (-\infty;\ +\infty)$. В случае $D \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - 24 \ge 0 \Leftrightarrow |a| \ge 2\sqrt{6}$, уравнение $t^2+at+6=0$, а вместе с ним и исходное, имеет решение.

Замечание. Первоначальное уравнение можно привести к виду $5\cos 2x + a\sin 2x = -7 \Leftrightarrow \sin(2x+\varphi) = -\dfrac{7}{\sqrt{25+a^2}}$, где $\sin\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{25+a^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{25+a^2}}$. Искомые значения a получаем из неравенства $\sqrt{25+a^2} \ge 7 \Leftrightarrow |a| \ge 2\sqrt{6}$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ -2\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{6};\ +\infty)$.

Пример 14. Дана функция

$$y = \lg(5\log_x(a + 2\sqrt{a-1}) + 1 - 3\log_{1+\sqrt{a-1}} x).$$

а) Из области определения функции y выбрали все натуральные числа и сложили их. Найти значения a, при которых такая сумма будет больше 8, но меньше 18.

б) Из области определения функции y выбрали все натуральные числа и нашли их произведение. Найти значения a, при которых полученное произведение будет больше 23, но меньше 33.

в) Из области определения функции y выбрали все натуральные числа и нашли их произведение. Найти значения a, при которых полученное произведение будет двузначным числом.

г) Найти значения a, при которых в области определения функции y есть двузначные числа.

Решение. Поскольку x и $1 + \sqrt{a-1}$ находятся в основании логарифмов, то $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 1$.

Так как $a + 2\sqrt{a-1} = (1 + \sqrt{a-1})^2$, то $\log_x(a + 2\sqrt{a-1}) = \dfrac{2}{\log_{1+\sqrt{a-1}} x}$. Пусть $t = \log_{1+\sqrt{a-1}} x$. Область определения функции y находим из неравенства $\frac{10}{t} + 1 - 3t > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3t^2 - t - 10}{t} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(t-2)(3t+5)}{t} < 0$, откуда $t \in (-\infty;\ -\frac{5}{3}) \cup (0;\ 2)$.

Множество решений неравенства $t < -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \log_{1+\sqrt{a-1}} x < -\frac{5}{3}$ не содержит натуральных чисел.

Решая неравенство $0 < t < 2 \Leftrightarrow 0 < \log_{1+\sqrt{a-1}} x < 2$, получаем $1 < x < (1+\sqrt{a-1})^2$. Таким образом, для $x > 1$ $D(y)$ представляет собой интервал $(1;\ (1 + \sqrt{a-1})^2)$.

Рассмотрим теперь отдельно каждый из случаев а) – г).

а) Суммы $2 + 3 + 4 = 9$, $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ удовлетворяют условиям задачи, а суммы $2 + 3 < 8$, $2 + 3 + 4 + 5 + 6 > 18$, $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$, ... – не удовлетворяют. Следовательно, число 4 должно принадлежать, а число 6 – не принадлежать интервалу $(1;\ (1 + \sqrt{a-1})^2)$. Значения a найдём из неравенства

$$4 < (1 + \sqrt{a-1})^2 \le 6 \Leftrightarrow 2 < 1 + \sqrt{a-1} \le \sqrt{6} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{a-1} \le \sqrt{6} - 1 \Leftrightarrow 2 < a \le 8 - 2\sqrt{6}.$$

б) Легко проверить, что только произведение $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ удовлетворяет условию $23 < 24 < 33$. Значения a находим из неравенства $4 < (1 + \sqrt{a-1})^2 \le 5 \Leftrightarrow 2 < 1 + \sqrt{a-1} \le \sqrt{5} \Leftrightarrow 2 < a \le 7 - 2\sqrt{5}$.

в) Так как $2 \cdot 3 < 10$, а $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 > 100$, то только произведение $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ удовлетворяет условиям задачи. Далее значения a

находим точно так же, как и в пункте б).

г) Значения a найдём из условия $(1+\sqrt{a-1})^2 > 10 \Leftrightarrow 1+\sqrt{a-1} > \sqrt{10} \Leftrightarrow a > 12-2\sqrt{10}$.

Ответ: а) $a \in (2;\ 8-2\sqrt{6}]$, б) $a \in (2;\ 7-2\sqrt{5}]$, в) $a \in (2;\ 7-2\sqrt{5}]$, г) $(12-2\sqrt{10};\ +\infty)$.

Приведём решения двух аналогичных задач (15 и 16).

Пример 15. Найти все значения $a \geq 4$, при которых в области определения функции $y = \ln(3\log_x(a+4\sqrt{a-4})+1-2\log_{2+\sqrt{a-4}} x)$ нет натуральных чисел, кратных пяти.

Решение. Поскольку x находятся в основании логарифма, то $x > 0$, $x \neq 1$.

Так как $a+4\sqrt{a-4} = (2+\sqrt{a-4})^2$, то $\log_x(a+4\sqrt{a-4}) = \dfrac{2}{\log_{2+\sqrt{a-4}} x}$. Пусть $t = \log_{2+\sqrt{a-4}} x$. Область определения функции y находим из неравенства $\frac{6}{t}+1-2t > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2t^2-t-6}{t} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(t-2)(2t+3)}{t} < 0$, откуда $t \in (-\infty;\ -\frac{3}{2}) \cup (0;\ 2)$.

Множество решений неравенства $t < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_{2+\sqrt{a-4}} x < -\frac{3}{2}$ не содержит натуральных чисел.

Решая неравенство $0 < t < 2 \Leftrightarrow 0 < \log_{2+\sqrt{a-4}} x < 2$, получаем $1 < x < (2+\sqrt{a-4})^2$. Таким образом, для $x > 1$ $D(y)$ представляет собой интервал $(1;\ (2+\sqrt{a-4})^2)$.

По условию числа 2, 3, 4 могут принадлежать, а число 5 не должно принадлежать интервалу $(1;\ (2+\sqrt{a-4})^2)$. Значения a найдём из неравенства $(2+\sqrt{a-4})^2 \leq 5 \Leftrightarrow 2+\sqrt{a-4} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{a-4} \leq \sqrt{5}-2 \Leftrightarrow 4 \leq a \leq 13-4\sqrt{5}$.

Ответ: $a \in [4;\ 13-4\sqrt{5}]$.

Пример 16. Найти все значения $a \geq 9$, при которых в области определения функции $y = \ln(3\log_x(a+6\sqrt{a-9})+1-2\log_{3+\sqrt{a-9}} x)$ нет двузначных натуральных чисел.

Решение. Поскольку x находятся в основании логарифма, то $x > 0$, $x \neq 1$.

Так как $a+6\sqrt{a-9} = (3+\sqrt{a-9})^2$, то $\log_x(a+6\sqrt{a-9}) = \dfrac{2}{\log_{3+\sqrt{a-9}} x}$. Пусть $t = \log_{3+\sqrt{a-9}} x$. Область определения функции y находим из неравенства $\frac{6}{t}+1-2t > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2t^2-t-6}{t} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(t-2)(2t+3)}{t} < 0$, откуда $t \in (-\infty;\ -\frac{3}{2}) \cup (0;\ 2)$.

Множество решений неравенства $t < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_{1+\sqrt{a-1}} x < -\frac{3}{2}$ не содержит натуральных чисел.

Решая неравенство $0 < t < 2 \Leftrightarrow 0 < \log_{3+\sqrt{a-9}} x < 2$, получаем $1 < x < (3+\sqrt{a-9})^2$. Таким образом, для $x > 1$ $D(y)$ представляет собой интервал $(1;\ (3+\sqrt{a-9})^2)$.

Числа 2, 3, 4, ..., 9 могут принадлежать, а число 10 не должно принадлежать интервалу $(1;\ (3+\sqrt{a-9})^2)$. Значения a найдём из неравенства $(3+\sqrt{a-9})^2 \le 10 \Leftrightarrow 3+\sqrt{a-9} \le \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{a-9} \le \sqrt{10} - 3 \Leftrightarrow 9 \le a \le 28 - 6\sqrt{10}$.

Ответ: $a \in [9;\ 28 - 6\sqrt{10}]$.

Пример 17. Найти все положительные значения a, при которых в области определения функции $y = (a^x - a^{ax+2})^{-0,5}$ есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трёхзначного натурального числа.

Решение. Область определения функции найдём из неравенства $a^x - a^{ax+2} > 0 \Leftrightarrow a^x > a^{ax+2}$.

Рассмотрим три случая:

1. $a > 1$. $a^x > a^{ax+2} \Leftrightarrow x > ax + 2 \Leftrightarrow x < \frac{-2}{a-1}$, $D(y) = (-\infty;\ \frac{-2}{a-1})$.

Область определения функции y не содержит положительных чисел, поэтому значения $a > 1$ условиям задачи не удовлетворяют.

2. При $a = 1$ $D(y) = \emptyset$.

3. $0 < a < 1$. $a^x > a^{ax+2} \Leftrightarrow x < ax + 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{1-a}$, $D(y) = (-\infty;\ \frac{2}{1-a})$.

Условиям задачи удовлетворяют те a, при которых
$10 < \frac{2}{1-a} \le 100 \Leftrightarrow 10 - 10a < 2 \le 100 - 100a \Leftrightarrow 0,8 < a \le 0,98$.

Ответ: $a \in (0,8;\ 0,98]$.

Пример 18. Найти все положительные значения a, при которых в области определения функции $y = (a^x - a^{ax+1})^{-0,5}$ имеются чётные натуральные числа, но все они не делятся нацело на число три.

Решение. Область определения функции найдём из неравенства $a^x - a^{ax+1} > 0 \Leftrightarrow a^x > a^{ax+1}$.

Рассмотрим три случая:

1. $a > 1$. $a^x > a^{ax+1} \Leftrightarrow x > ax + 1 \Leftrightarrow x < \frac{-1}{a-1}$, $D(y) = (-\infty;\ \frac{-1}{a-1})$.

Область определения функции y не содержит положительных чисел, поэтому значения $a > 1$ условиям задачи не удовлетворяют.

2. При $a = 1$ $D(y) = \emptyset$.

3. $0 < a < 1$. $a^x > a^{ax+1} \Leftrightarrow x < ax + 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{1-a}$, $D(y) = (-\infty;\ \frac{1}{1-a})$. Так как число 6 является наименьшим чётным натуральным, делящимся нацело на число три, то условиям задачи удовлетворяют те a, при которых
$2 < \frac{1}{1-a} \le 6 \Leftrightarrow 2 - 2a < 1 \le 6 - 6a \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a \le \frac{5}{6}$.

Ответ: $a \in (\frac{1}{2};\ \frac{5}{6}]$.

Пример 19. Решить неравенство

$$2\log_{2\sin a}(x+2) \le \log_{2\sin a}(3x+10).$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1. $0 < 2\sin a < 1 \Leftrightarrow 0 < \sin a < \frac{1}{2}$, откуда $a \in (2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Так как основание логарифма $2\sin a \in (0;1)$, то исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x+2)^2 \ge 3x+10 \\ x+2>0 \\ 3x+10>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6 \ge 0 \\ x > -3\frac{1}{3} \\ x > -2, \end{cases} \quad \text{откуда } x \ge 2.$$

2. $2\sin a > 1 \Leftrightarrow \sin a > \frac{1}{2}$, откуда $a \in (\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k)$, $k \in Z$.
В этом случае получаем систему

$$\begin{cases} (x+2)^2 \le 3x+10 \\ x+2>0 \\ 3x+10>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6 \le 0 \\ x > -3\frac{1}{3} \\ x > -2, \end{cases} \quad \text{откуда } x \in (-2;\ 2].$$

Ответ: $\emptyset$ при $a \in \{\frac{\pi}{6} + 2\pi k\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\} \cup [\pi(2k+1); 2\pi(k+1)]$; $x \in [2;\ +\infty)$ при $a \in (2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$; $x \in (-2;\ 2]$ при $a \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Пример 20. Найти все значения p, при которых уравнение $4\cos^3 x + p = 7\cos 2x$ не имеет решений.

Решение. Применяя формулу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, приведём уравнение к кубическому относительно $\cos x$:

$4\cos^3 x + p = 7(2\cos^2 x - 1) \Leftrightarrow p = -4\cos^3 x + 14\cos^2 x - 7$.

1 способ. Найдём множество значений функции
$y = -4\cos^3 x + 14\cos^2 x - 7$ или $y = \cos^2 x(14 - 4\cos x) - 7$.

Так как $-1 \le \cos x \le 1$, $0 \le \cos^2 x \le 1$, то $14 - 4 \le 14 - 4\cos x \le 14 + 4 \Leftrightarrow 10 \le 14 - 4\cos x \le 18$ и $0 \le \cos^2 x(14 - 4\cos x) \le 18$, следовательно, $-7 \le y \le 11$.

Покажем теперь, что функция y принимает все значения от -7 до 11. При $\cos x = 0$ функция y принимает значение -7, а при $\cos x = -1$ – значение 11. Это означает, что $y_{наим} = -7$, $y_{наиб} = 11$. Так как косинус – непрерывная функция, то и функция y непрерывна. Поэтому она принимает все промежуточные значения от наименьшего до наибольшего. Таким образом, уравнение имеет решение, если $p \in E(y) = [-7;\ 11]$, и не имеет решений, если $p \in (-\infty; -7) \cup (11;\ +\infty)$.

Ответ: $p \in (-\infty; -7) \cup (11;\ +\infty)$.

2 способ. Сделав замену переменной $t = \cos x$, придём к задаче о нахождении множества значений функции $f(t) = -4t^3 + 14t^2 - 7$ на отрезке $[-1;\ 1]$. Решая уравнение $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -12t^2 + 28t = 0$, найдём критические точки функции f : $t_1 = 0 \in [-1;\ 1]$, $t_2 = \frac{7}{3} \notin [-1;\ 1]$. Выберем наименьшее и наибольшее из чисел: $\{f(-1),\ f(0),\ f(1)\}$. $f_{наим} = f(0) = -7$, $f_{наиб} = f(-1) = 11$. В силу непрерывности функции f $E(f) = [-7;\ 11]$. Далее решение задачи завершается так, как и в 1 способе.

Пример 21. Найти все значения p, при которых уравнение $9 - 4\cos x = p(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ имеет решения.

Решение. Этот пример тоже можно решать двумя указанными выше способами. Однако, в область определения уравнения не входят те значения x, при которых $\cos x = 0$.

Уравнение $9 - 4\cos x = p(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ преобразуем к виду $\cos^2 x(9 - 4\cos x) = p$. Множество значений левой части уравнения – промежуток $(0;\ 13]$, так как $\cos x \ne 0$. Следовательно, уравнение имеет решения при $p \in (0;\ 13]$.

Ответ: $p \in (0; 13]$.

Пример 22. При каких a функция $y = \ln(8 - x) + \ln(x + a)$ имеет максимум в точке с абсциссой, равной -3?

Решение. Функция y определена на интервале $(-a;\ 8)$ (при условии $a > -8$). Производная функции y равна $y' = \frac{-1}{8 - x} + \frac{1}{x + a} = \frac{8 - a - 2x}{(8 - x)(x + a)}$. Из уравнения $y' = 0 \Leftrightarrow 8 - a - 2x = 0$ находим $x = \frac{1}{2}(8 - a)$. По условию $\frac{1}{2}(8 - a) = -3$, откуда $a = 14$. Легко проверить, что $x = -3$ действительно является точкой максимума.

Ответ: $a = 14$.

Пример 23. Найдите значение p, при котором функция $y = 3^{5x^2-2px+3}$ имеет минимум в точке $x_0 = 2$.

Решение. Производная функции $y' = 3^{5x^2-2px+3} \cdot \ln 3 \cdot (10x - 2p)$ обращается в нуль при $x = \frac{p}{5}$. По условию $\frac{p}{5} = 2$, откуда $p = 10$. Легко убедиться, что $x_0 = 2$ действительно является точкой минимума.

Ответ: $p = 10$.

Пример 24. Найти все значения a, при которых функция $y = \sqrt[p]{5x^2 - (2-a)x + 2 - 4a}$ имеет минимум в точке $x_0 = \frac{1}{2}$.

Решение. Функция y принимает наименьшее значение в той же самой точке, что и квадратный трёхчлен $5x^2 - (2-a)x + 2 - 4a$, т.е. x_0 совпадает с абсциссой вершины параболы. Значение a находим из уравнения $\frac{2-a}{10} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -3$.

Ответ: $a = -3$.

Упражнения.

1. Найти все значения p, при которых уравнение

а) $3^{x+1}(3^{2x+1} - 2 \cdot 3^{x+1}) + 9p = 5 - 3^{x+2}$,

б) $2^{3x+1} - 2 = 3 \cdot (4^x + 2^{x+2}) + p$,

в) $2^{3x+1} + 8 = 3 \cdot 2^{x+1}(3 + 2^x) + p$,

г) $5^{3x+1} + 8 = 3 \cdot 5^{x+1}(3 + 5^x) - p$

имеет единственный корень.

2. Найти все значения p, при которых уравнение

а) $3^x(3^{2(x+1)} - 7,5 \cdot 3^{x+1}) = p - 3(4 \cdot 3^x + 1)$,

б) $1 + 3^{2x+2}(3^x - 2) = 0,5 \cdot 3^{x+1}(3^{x+1} - 8) - p$,

в) $2^{x+1}(4^{x+1} + 6) + 2^x(2^{2x} - 9 \cdot 2^{x+1}) = p + 4(9 \cdot 2^{2x-3} - 1)$

имеет ровно два корня.

3. Найти все значения p, при которых уравнение

$$3^{3x+2} + p = 2 \cdot 9^{x+1} - 3^{x+2} + 1$$

имеет ровно три корня.

4. Найти все значения p, при которых уравнение

$$2^{4-3x} - 2 = 3(2^{3-x} + 4^{1-x}) + p$$

не имеет корней.

5. Найти все значения p, при которых уравнение

$$2^{3x+1} + 8 = 3 \cdot 2^{x+1}(3 + 2^x) + p$$

или не имеет корней, или имеет единственный корень.

6. Из области определения функции $y = \log_4\left(a^{\frac{4x+3}{x-2}} - a^a\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a, при которых такая сумма будет больше 10, но меньше 17.

7. Из области определения функции $y=\log_9\left(a^{\frac{7x+3}{x-3}}-a^a\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a, при которых такая сумма будет больше 9, но меньше 16.

8. Из области определения функции $y=\log_5\left(a^{\frac{5x+2}{x-2}}-a^a\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a, при которых такая сумма будет больше 5, но меньше 15.

9. Из области определения функции $y=\log_6\left(a^a-a^{\frac{6x+7}{x+6}}\right)$ взяли все целые положительные числа и перемножили их. Найдите все положительные значения a, при которых такое произведение будет больше 5, но меньше 10.

10. Из области определения функции $y=\log_4\left(a^a-a^{\frac{5x+9}{x+8}}\right)$ взяли все целые положительные числа и перемножили их. Найдите все положительные значения a, при которых такое произведение будет чётным, но не кратным 3.

11. Из области определения функции $y=\ln\left(a^a-a^{\frac{5x+3}{x+2}}\right)$ взяли все целые положительные числа и перемножили их. Найдите все положительные значения a, при которых такое произведение будет больше 20, но меньше 30.

12. Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y=\log_7((\sqrt{a})^{2x+10}+(x^2\cdot\sqrt{x})^2\cdot a^4-x^{5+x\log_x a}-(a^3)^{\log_2 8})$$

содержит ровно три натуральных числа.

13. Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y=\log_{100}(a^{x+1}\cdot x^{4\log_x a}+a^{4+5\log_a x}-(\sqrt{x})^{10+2x\log_x a}-\sqrt{a^{18}})$$

содержит ровно три целых числа.

14. Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y=\lg(a^{x+2}\cdot x^{3\log_x a}+a^4\cdot x^5-(\sqrt{x})^{10+2x\log_x a}-(\sqrt{a})^{18})$$

содержит ровно одно целое число.

15. Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y=((\sqrt{a})^{2x+10}+(x^2\cdot\sqrt{x})^2\cdot a^3-x^{5+x\log_x a}-(a^2)^{\log_2 16})^{-0,5}$$

содержит ровно одно двузначное натуральное число.

16. Найдите все положительные, не равные 1, значения a, при которых область определения функции

$$y=(a^{x+3}\cdot a^2+a^{4+5\log_a x}-x^{5+x\log_x a}-(\sqrt[3]{a})^{27})^{0,5}$$

не содержит двузначных натуральных чисел.

17. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \log_{17+a}\left(\ln\dfrac{a-x}{3x+a}\right)$ содержит отрезок длиной 5, состоящий из положительных чисел.

18. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \log_{11-a}\left(\lg\dfrac{2x+a}{a-3x}\right)$ содержит отрезок длиной 3, состоящий из положительных чисел.

19. Найдите все значения a, при которых область определения функции $y = \log_{6+a}\left(\lg\dfrac{3x+a}{a-4x}\right)$ содержит отрезок единичной длины, состоящий из отрицательных чисел.

20. При каких значениях a сумма $\log_a\left(\dfrac{4+3|x|}{1+|x|}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{6+5|x|}{1+|x|}\right)$ будет больше единицы при всех значениях x?

21. При каких значениях a сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

22. При каких значениях a сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

23. При каких значениях a сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

24. При каких a выражение $(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-\sqrt{a}}$ больше выражения $0{,}25^{1-|a|-\log_2\sqrt{1-x^2}}$ при всех допустимых значениях x?

25. При каких a выражение $(1-2^x)^{\log_2(1-2^x)-2^a}$ больше выражения $0{,}5^{3-\sqrt{a}-\log_4(1+4^x-2^{x+1})}$ при всех допустимых значениях x?

26. При каких a выражение $(\cos x)^{\log_3(\cos x)-|a|}$ больше выражения $3^{\log_9(1-\sin^2 x)+a(a-2)}$ при всех допустимых значениях x?

27. При каких a выражение $3+\sin x(2\sin x + a\cos x)$ равно -1 хотя бы при одном значении x?

28. При каких a выражение $3+\cos x(a\cos x + 4\sin x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

29. При каких a выражение $1+\sin x(a\sin x + 5\cos x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

30. При каких a выражение $1+\sin x(3\sin x + a\cos x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

31. Из области определения функции
$y = \ln(12 + 2\log_x(a+4\sqrt{a-4}) - 7\log_{2+\sqrt{a-4}} x)$ выбрали все натуральные числа и нашли их сумму. Найдите все значения a, при которых полученная сумма будет
а) больше 30, но меньше 40; б) больше 40, но меньше 50.

32. Из области определения функции
$y = \ln(3\log_x(a+4\sqrt{a-4})+1-2\log_{2+\sqrt{a-4}} x)$ выбрали все натуральные числа и нашли их сумму. Найдите все значения a, при которых полученная сумма будет
а) больше 5, но меньше 40; б) больше 31, но меньше 41.

33. Из области определения функции
$y = \lg(5\log_x(a+4\sqrt{a-4})+1-3\log_{2+\sqrt{a-4}} x)$ выбрали все натуральные числа и нашли их произведение. Найдите все значения a, при которых полученное произведение будет больше 20, но меньше 30.

34. Из области определения функции
$y = \ln(2\log_x(a+4\sqrt{a-4})-1-3\log_{2+\sqrt{a-4}} x)$ выбрали все натуральные числа и нашли их сумму. Найдите все значения a, при которых полученная сумма будет больше 32, но меньше 42.

35. Из области определения функции
$y = \ln(2\log_x(a+6\sqrt{a-9})-1-3\log_{3+\sqrt{a-9}} x)$ выбрали все натуральные числа и нашли их сумму. Найдите все значения a, при которых полученная сумма будет больше 33, но меньше 43.

36. Найдите все значения $a > 1$, при которых в области определения функции $y = \ln(9\log_x(a+2\sqrt{a-1})-5-2\log_{1+\sqrt{a-1}} x)$ нет двузначных натуральных чисел.

37. Решите неравенство $\log_{\operatorname{tg} a}(3x+13) > 2\log_{\operatorname{tg} a}(x+3)$.

38. Найдите все значения p, при которых уравнение

а) $8\cos^3 x + p = 9\cos 2x$, б) $4\sin^3 x + p = 7\cos 2x$,

в) $\cos 2x + \frac{p}{\sin x} = -10$, г) $2\cos 2x - \frac{p}{\cos x} = 13$

не имеет решений.

39. Найти все значения p, при которых уравнение

а) $7 - 2\cos x = p(1+\operatorname{tg}^2 x)$, б) $5 - 3\cos x = p(1+\operatorname{tg}^2 x)$

имеет хотя бы один корень.

40. При каких a функция $y = \lg(x+7) + \lg(a-3x)$ имеет максимум в точке с абсциссой, равной –2?

41. При каких a функция $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-5) + \log_{\frac{1}{2}}(a-2x)$ имеет минимум в точке с абсциссой, равной 6,5?

42. Найдите значение p, при котором функция
$y = 2^{4x^2+3px+7}$ имеет минимум в точке $x_0 = 6$.

43. Найдите значение p, при котором функция
$y = 0,2^{3x^2+4px+7}$ имеет максимум в точке $x_0 = 4$.

44. Найдите значения a, при которых функция
$y = \sqrt[5]{-6x^2+(3+a)x+5-a}$ имеет максимум в точке $x_0 = \frac{1}{6}$.

45. Найдите значения a, при которых функция
$y = \sqrt[9]{-5x^2-(4-a)x+5+11a}$ имеет максимум в точке $x_0 = 3,5$.

Ответы

Глава I

§1

1) $x = 2\log_2|a|$ при $a \in (-\infty;\ 0)$; $\emptyset$ при $a = 0$; $x = 0$ при $a = 1$; $x_1 = \log_2 a$, $x_2 = 2\log_2 a$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1; +\infty)$.

2) $x_{1,2} = \pm\log_{12}(1 + \sqrt{1-a})$ при $a \in (-\infty;\ 1)$; $x = 0$ при $a = 1$; $\emptyset$ при $a \in (1; +\infty)$.

3) $x = 1$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; $x \in R$ при $a = 1$.

4) $\emptyset$ при $b \in (-\infty;\ 0]$ и $a = 1$, $b \neq 1$; $x \in R$ при $a = b = 1$; $x = \frac{1}{2}\log_a \dfrac{ba^3}{a^3 - a + 1}$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$, $b > 0$.

5) $x \in R$ при $a = b = 1$; $x = -\frac{2}{3}$ при $a = 1$, $b \neq 1$; $x = -\frac{1}{2}$ при $b = 1$, $a \neq 1$; $x = \dfrac{2\lg b - \lg a}{2\lg a - 3\lg b}$ $(a^2 \neq b^3)$; $\emptyset$ при $a^2 = b^3$.

6) $x = 2$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; $x \in R$ при $a = 1$.

7) $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ 12) \cup \{16\}$; $x_{1,2} = \log_3(1 \pm \sqrt{a-12})$ при $a \in [12;\ 13)$; $x = \log_3(1 + \sqrt{a-12})$ при $a \in [13;\ 16) \cup (16;\ +\infty)$.

8) $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17})$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; $x \in R \setminus \{-1\}$ при $a = 1$.

§2

N1. 1) $a \in (0;\ +\infty)$. 2) $a \in [2;\ +\infty)$. 3) $a \in (-2;\ 2]$. 4) $a \in R$. 5) $a \in (0;\ +\infty)$. 6) $a \in (-\infty;\ -2] \cup [0;\ +\infty)$.

N2. 1) $a \in (-\infty;\ -\frac{3}{2}] \cup [5;\ +\infty)$. 2) $a \in (-\infty;\ -2] \cup [2;\ +\infty)$. 3) $a \in (-\infty;\ -1]$. 4) $a \in (-\infty;\ 5) \cup [10;\ +\infty)$. 5) $a \in (-\infty;\ \frac{3}{7}) \cup [4;\ +\infty)$.

§3

N1. 1) $a \in (-\infty;\ 2] \cup \{3\}$. 2) $a \in (-\infty;\ 0] \cup \{\frac{1}{4}\}$. 3) $a \in (-\infty;\ \frac{1}{2}] \cup \{1\}$. 4) $a \in (0;\ +\infty)$. 5) $a \in (-\infty;\ -\frac{3}{2}] \cup \{-1\}$. 6) $a \in (0;\ +\infty)$. 7) $a \in (-\infty;\ 1] \cup \{2,5\} \cup [4;\ +\infty)$. 8) $a = \frac{5}{2}$. 9) $a \in (-\infty;\ 0) \cup \{1\} \cup [\frac{4}{3};\ +\infty)$. 10) $a \in \{-1;\ 3,5\}$.
11) $a \in \{-1;\ 0;\ 2\}$. 12) $a \in \{-1;\ 0\}$.

N2. $a \in (-\infty;\ -\frac{\sqrt{3}}{2})$. **N3.** $a \in (\frac{2}{3};\ 5)$.

N4. $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 3)$; $x = 0$ при $a = 0$; $x = \frac{9}{2}$ при $a = 3$; $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ при $a \in (3; +\infty)$. **N5.** $a = -4$.

§4

N1. 1) $x \in (\log_a 2;\ 0) \cup (-\log_a 2;\ +\infty)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (-\infty;\ -2\log_a 2) \cup (0;\ \log_a 2)$ при $a \in (1;\ +\infty)$; $\emptyset$ при $a = 1$. 2) $x \in R$ при $a \in (-\infty;\ 0]$; $x \in (-\infty;\ \log_2 a]$ при $a \in (1; +\infty)$.

3) $x \in (-3;\ 5)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (-\infty;\ -3) \cup (5;\ +\infty)$ при $a \in (1;\ +\infty)$; $\emptyset$ при $a = 1$.

4) $x \in R$ при $a \in (-\infty;\ 0)$; $x \in (-\infty;\ -a) \cup (a;\ +\infty)$ при $a \in [0;\ +\infty)$.

5) $x \in R$ при $a \in (-\infty;\ 0]$; $x \in (-\infty;\ -2-\log_2 a) \cup (4-\log_2 a;\ +\infty)$ при $a \in (0;\ +\infty)$.

6) $x \in (0;\ a) \cup (\frac{1}{a};\ +\infty)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (\frac{1}{a};\ a)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

N2. $a \in [\frac{5}{2};\ +\infty)$. **N3.** $a \in (-\infty;\ -4]$. **N4.** $a \in [-\frac{3}{2\sqrt{5}};\ \frac{3}{2\sqrt{5}}]$.

§5

N1. 1) $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ \frac{2}{3}]$; $x \in (-\infty;\ \log_6(3a-2))$ при $a \in (\frac{2}{3};\ 1]$; $x \in (\log_6(a-1);\ \log_6(3a-2))$ при $a \in (1;\ +\infty)$. 2) $x = -2$, $y = 2$ при $a = 3$; $\emptyset$ при $a \neq 3$.

N2. 1) $a \in [\frac{1}{2};\ 1]$. 2) $a \in [\frac{1}{3};\ 1]$. 3) $a \in (1;\ \frac{3}{2}]$.

N3. 1. $a \neq -2b$; 2. $a = -2b$, $a \in (0;\ 14)$.

N4. 1) $a = \frac{2}{5}$. 2) $a = 0$. 3) $a \in \{-3;\ -2\}$.

Глава 2

§1

1) $x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}}$ при $a \in (0;\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[3]{4}};\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; $\emptyset$ при $a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

2) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9-a}$ при $a \in (-\infty;\ 9)$; $x = 1$ при $a = 9$; $\emptyset$ при $a \in (9;\ +\infty)$.

3) $x = a + 2$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$; $x = a - 2$ при $a \in (2;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

4) $x \in (0;\ +\infty)$ при $a = 1$; $x = \frac{1}{3}$, $x = 3$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

5) $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4a^2})$ при $a \in (0;\ \frac{1}{2}]$; $\emptyset$ при $a \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$.

6) $x_1 = a + 10^3$, $x_2 = a + \sqrt[3]{10}$, $a \in R$.

7) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $x_2 = \frac{1}{a^2}$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

8) $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ b-1)$; $x = a + 2$ при $a = b - 1$; $x_{1,2} = a + 2 \pm 2\sqrt{a-b+1}$ при $a \in (b-1;\ b)$; $x = a + 4$ при $a = b$; $x = a + 2 + 2\sqrt{a-b+1}$ при $a \in (b;\ +\infty)$.

9) $x = 4a$ при $a \in (0;\ +\infty)$.

10) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; $x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ при $a = 1$.

§2

N1. 1) $a = 2$. 2) $a \in [-4;\ \frac{1}{2}(\sqrt{13}-1))$. 3) $a \in [-3;\ \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1))$.
4) $a \in [-6;\ \frac{1}{2}(\sqrt{17}-3))$. 5) $a \in (0;\ +\infty)$. 6) $a \in (1;\ 100]$.
7) $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2\sqrt{2})$. 8) $a \in (0;\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[3]{4}};\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.
9) $a \in [-\frac{1}{2};\ 0) \cup (0;\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{37}-1]$. 10) $a \in [-1;\ 0) \cup (0;\ 1-\frac{1}{4}\sqrt{14}]$.
11) $a \in [3+\frac{\sqrt{2}}{2};\ 4) \cup (4;\ 3+\sqrt{14}]$.
N2. 1) $a \in (-\infty;\ 0] \cup \{3\}$. 2) $a \in (-\infty;\ 0)$.
N3. 1) $x = 2$. 2) $x = 1$. 3) $x = 1$. **N4.** $a \in (\frac{1}{2};\ 1) \cup (1;\ 2)$.
N5. $a = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

§3

N1. 1) $a \in (-\infty;\ 0) \cup \{4\}$. 2) $a \in (-\infty;\ 0) \cup \{16\}$.
3) $a \in (-\infty;\ 0) \cup \{20\}$. 4) $a \in \{2\} \cup (\frac{7}{8};\ \frac{7}{4}]$.
5) $a \in \{-16;\ 4\} \cup [\frac{17}{4};\ \frac{17}{2}]$. 6) $a \in (-2;\ -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2};\ -1] \cup \{-\frac{3}{4}\}$.
7) $a \in (-\infty;\ -1) \cup \{-\frac{3}{4}\}$. 8) $a \in (-\infty;\ 0) \cup \{4\}$.
9) $a \in (-\infty;\ -\frac{5}{7}) \cup (-\frac{5}{7};\ 0) \cup [\frac{8}{7};\ +\infty)$. 10) $a = 0,8$.
N2. 1) $a = 24$. 2) $a = 1$. **N3.** 1) $a \in (-\frac{1}{4};\ 0)$. 2) $a \in (0;\ \frac{1}{\sqrt[3]{36}})$.
3) $a \in (0;\ \frac{1}{2})$. 4) $a \in (0;\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$. **N4.** 1) $a \in (1;\ 3)$ – два корня; $a = 3$ – один корень; $a \in (-\infty;\ 1] \cup (3;\ +\infty)$ – решений нет.
2) $a \in (-4;\ -3)$ – три корня; $a \in (-\infty;\ -4] \cup [-3;\ 0)$ – два корня; $a = 0$ – один корень; $a \in (0;\ +\infty)$ – решений нет.

§4

N1. 1) $x \in (a;\ \frac{1}{a})$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (0;\ \frac{1}{a}) \cup (a;\ +\infty)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

2) $x \in (-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{a}}) \cup (-\sqrt{a};\ 0) \cup (0;\ \sqrt{a}) \cup (\frac{1}{\sqrt{a}};\ +\infty)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (-\infty;\ -\sqrt{a}) \cup (-\frac{1}{\sqrt{a}};\ 0) \cup (0;\ \frac{1}{\sqrt{a}}) \cup (\sqrt{a};\ +\infty)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

3) $x \in (0;\ a) \cup (\frac{1}{a^4};\ +\infty)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (\frac{1}{a^4};\ a)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

4) $x \in (a^3;\ \frac{1}{a^3})$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (0;\ \frac{1}{a^3}) \cup (a^3;\ +\infty)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

5) $x \in (a;\ 1)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (1;\ a)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

6) $x \in (0;\ 1)$ при $a \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; $\emptyset$ при $a = 0$.

7) $x \in (-\infty;\ -1-\sqrt{1+a^2}) \cup (\sqrt{1+a^2}-1;\ +\infty)$ при $a \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$; $x \in (-1-\sqrt{1+a^2};\ -2) \cup (0;\ \sqrt{1+a^2}-1)$ при $a \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$.

8) $x \in (-1;\ -\sqrt{1-a}] \cup [\sqrt{1-a};\ 1)$ при $a \in (0;\ 1)$; $\emptyset$ при $a \in (1; +\infty)$.

9) $x \in (0;\ a) \cup (1;\ \frac{1}{a})$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (\frac{1}{a};\ 1) \cup (a;\ +\infty)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

10) $x \in (a^4;\ \frac{1}{a})$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (\frac{1}{a};\ a^4)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

11) $x \in (0;\ 2) \cup (2^{-a};\ +\infty)$ при $a \in (-\infty;\ -1)$; $x \in (0;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$ при $a = -1$; $x \in (0;\ 2^{-a}) \cup (2;\ +\infty)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

12) $x \in [a;\ 1]$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in [1;\ a]$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

13) $x \in (0;\ a) \cup (1;\ \frac{1}{a^2})$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (\frac{1}{a^2};\ 1) \cup (a;\ +\infty)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

14) $x \in (a^4;\ a) \cup (\frac{1}{a^2};\ +\infty)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (0;\ \frac{1}{a^2}) \cup (a;\ a^4)$ при $a \in (1; +\infty)$.

15) $x \in (0;\ a^2) \cup (1;\ \frac{1}{a^3})$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (\frac{1}{a^3};\ 1) \cup (a^2;\ +\infty)$ при $a \in (1; +\infty)$.

16) $x \in (-\frac{3}{2};\ -1]$ при $a \in (-\infty;\ +\infty)$.

17) $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ 0]$; $x \in (\frac{a}{2};\ 3a)$ при $a \in (0;\ 4\sqrt{2})$; $x \in (\frac{a}{2};\ \frac{1}{4}(7a - 5\sqrt{a^2-32})) \cup (\frac{1}{4}(7a + 5\sqrt{a^2-32});\ 3a)$ при $a \in [4\sqrt{2};\ +\infty)$.

18) $x \in (\frac{a-3}{a-2};\ 2]$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in [2;\ \frac{a-3}{a-2})$ при $a \in (1;\ 2)$; $x \in [2;\ +\infty)$ при $a = 2$; $x \in (-\infty;\ \frac{a-3}{a-2}) \cup [2;\ +\infty)$ при $a \in (2;\ +\infty)$.

19) $x \in (0;\ a^3)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (a^3;\ +\infty)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

20) $x \in (1;\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a^2})$ при $a \in (0;\ 1)$;
$x \in (\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a^2});\ +\infty)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

21) $x \in (0;\ a^2) \cup (1;\ +\infty)$ при $a \in (0;\ 1)$; $x \in (1; a^2)$ при $a \in (1;\ +\infty)$.

22) $x \in (\frac{1}{2};\ 1) \cup (3;\ +\infty)$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

23) $\emptyset$ при $a \in (-\infty;\ -4]$; $x \in (2a+3;\ \frac{1}{3}(7a+13))$ при $a \in (-4;\ +\infty)$.

24) $x \in (2a;\ +\infty)$ при $a \in (0;\ +\infty)$.

N2. 1) $a \in (11;\ +\infty)$. 2) $a \in (2;\ 5]$. 3) $a \in (0;\ 1)$. 4) $a \in (-3;\ -\sqrt{2}-1) \cup (\sqrt{2}-1;\ 1)$. **N3.** $a \in [2;\ +\infty)$. **N4.** 1) $a \in (0;\ 1]$. 2) $a \in [0;\ 1)$.

§5

N1. 1) $\{(1;\ 1),\ (\log_a b;\ \log_b a\}$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; $b \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. 2) $\{(|a|^3;\ \frac{1}{|a|}),\ (\frac{1}{|a|};\ |a|^3)\}$ при $a \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; $\emptyset$ при $a = 0$. 3) $\{(a;\ a^2),\ (a^2;\ a)\}$ при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ \infty)$; $\{(-(a+1);\ (a+1)^2),\ ((a+1)^2;\ -(a+1))\}$ при $a \in (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ -1)$; $\emptyset$ при $a \in (-1;\ 0) \cup \{-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$. 4) $(a^6;\ a^8)$ при $a \neq 0$; $\emptyset$ при $a = 0$. 5) $\emptyset$.
N2. 1) $a \in (-\infty; 0) \cup (9;\ +\infty)$. 2) $a \in [-\frac{9}{4};\ 4)$. 3) $a \in [4;\ +\infty)$. 4) $a \in [4;\ +\infty)$. 5) $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ \frac{81}{4}]$. 6) $a \in (4;\ 5) \cup (5;\ 10)$. 7) $a \in (0;\ \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}]$. 8) $a \in (\frac{3}{2};\ 2) \cup (2;\ 4)$. **N3.** 1) $a \in (-1;\ 0]$. 2) $(-\infty;\ -16) \cup \{9\}$. **N4.** а) $a \in (-\infty;\ -4) \cup \{\frac{9}{4}\}$; б) $a \in (\frac{9}{4};\ +\infty)$.
N5. $a \in (2\pi k;\ \pi(2k+1)]$, $k \in N$.

§6

N1. а) $p \in (-\infty;\ \frac{11}{27}) \cup \{\frac{5}{9}\}$; б) $p \in \{-22\} \cup [-2;\ +\infty)$; в) $p \in \{-46\} \cup [8;\ +\infty)$; г) $p \in (-\infty;\ -8] \cup \{127\}$.
N2. а) $p \in (\frac{1}{3};\ 3] \cup \{4\frac{5}{6}\}$; б) $p \in \{-2\frac{5}{6}\} \cup [-1;\ \frac{5}{3})$; в) $p \in (1\frac{1}{3};\ 4] \cup \{5\frac{5}{6}\}$.
N3. $p \in (-\frac{1}{3};\ 1)$. **N4.** $p \in (-\infty;\ -22)$. **N5.** $p \in (-\infty;\ -46] \cup [8;\ +\infty)$.
N6. $a \in [6\frac{3}{4};\ 7\frac{2}{3})$. **N7.** $a \in [13;\ 15)$. **N8.** $a \in [8;\ 11)$. **N9.** $a \in (2\frac{7}{9};\ 3{,}1]$.
N10. $a \in (1{,}9;\ 2\frac{2}{11}]$. **N11.** $a \in (3\frac{5}{6};\ 4]$. **N12.** $a \in (7;\ 8]$.
N13. $a \in (7;\ 8]$. **N14.** $a \in [2;\ 3) \cup (5;\ 6]$. **N15.** $a \in (10;\ 11]$.
N16. $a \in (1;\ 10)$. **N17.** $a \in (-17;\ -16) \cup (-16;\ -15)$.
N18. $a \in (9;\ 10) \cup (10;\ 11)$. **N19.** $a \in (-6;\ -5) \cup (-5;\ -4)$.
N20. $a \in (1;\ 15]$. **N21.** $a \in [5;\ 12]$. **N22.** $a \in (0;\ 1) \cup (16;\ +\infty)$.
N23. $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. **N24.** $a \in [0;\ 1)$. **N25.** $a \in [0;\ 9]$.
N26. $a \in (0;\ 2)$. **N27.** $a \in (-\infty;\ -4\sqrt{6}] \cup [4\sqrt{6};\ +\infty)$.
N28. $a \in (-\frac{5}{3};\ +\infty)$. **N29.** $a \in (5\frac{1}{4};\ +\infty)$. **N30.** $a \in (-4;\ 4)$.
N31. а) $a \in (16 - 8\sqrt{2};\ 5]$, б) $a \in (5;\ 18 - 4\sqrt{10}]$. **N32.** а) $a \in (4;\ 5]$, б) $a \in (16 - 8\sqrt{2};\ 5]$. **N33.** $a \in (4;\ 13 - 4\sqrt{5}]$. **N34.** $a \in (40;\ 53]$. **N35.** $a \in (34;\ 45]$. **N36.** $a \in (1;\ 12 - 2\sqrt{10}]$.
N37. $\emptyset$ при $a \in \{\frac{\pi}{4} + \pi k\} \cup [-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k]$; $x \in (1;\ +\infty)$ при $a \in (\pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi k)$; $x \in (-3;\ 1)$ при $a \in (\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$.
N38. а) $p \in (-\infty;\ -9) \cup (17;\ +\infty)$; б) $p \in (-\infty;\ -7) \cup (11;\ +\infty)$; в) $p \in (-\infty;\ -9) \cup \{0\} \cup (9;\ +\infty)$; г) $p \in (-\infty;\ -11) \cup \{0\} \cup (11;\ +\infty)$.
N39. а) $p \in (0;\ 9]$; б) $p \in (0;\ 8]$. **N40.** $a = 9$. **N41.** $a = 16$.
N42. $p = -16$. **N43.** $p = -6$. **N44.** $a = -1$. **N45.** $a = 39$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

Показательные уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств

ГЛАВА 2

Логарифмические уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств

Абитуриент: Готовимся к ЕГЭ

Вадим Владимирович Локоть

**ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ**

Публикуется в авторской редакции

Главный редактор *И.Ю. Синельников*
Ответственный за выпуск *В.Е. Дремин*
Дизайн обложки *А.Г. Чувасов*

Лицензия серия ИД № 04186 от 06.03.2001
Подписано к печати 12.01.2004. Формат 60×90/16. Объем 6 п.л.
Печать офсетная. Бумага типографская № 1. Тираж 5000 экз. Заказ № 3936.

Издательство «АРКТИ»

125212, Москва, Головинское шоссе, д. 8, кор. 2
Тел.: (095) 742-1848

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов в ФГУП ДПК Роспатента
142001, г. Домодедово, Каширское шоссе, 4, корп. 1.