честь из полученной дроби данную дробь, то получится $\frac{1}{15}$. Найти данную дробь.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

10. Некто родился в девятнадцатом веке. В 1901 году сумма цифр числа, выражающего год его рождения, равнялась сумме цифр числа, выражающего количество прожитых лет. Определить, в каком году родился этот человек.

Ответ: 1810.

Задачи на тему «Работа»

Задачи, в которых кто-то выполняет некоторую работу, или задачи, связанные с наполнением или опорожнением резервуаров, напоминают задачи «на движение».

В задачах такого типа вся работа или полный объем резервуара аналогичны роли расстояния в задачах «на движение», а производительности выполняющих работу объектов аналогичны скоростям движения.

Часто в этих задачах объем работы не указывается и не является искомым. В таких случаях объем всей работы удобно принимать за единицу.

Введем буквенные обозначения, единицы измерения и зависимость трех величин.

1. Работа A (м^3, га, л, машин, деталей и т.д.).
2. Производительность P — работа в единицу времени ($^{м^3}/_{ч}$, $^{га}/_{смена}$, $^{дет}/_{дн}$ и т.д.).
3. Время работы t (ч, мин, смена и т.д.).
4. Зависимость: $A = P \cdot t$.

Пример 1

Три каменщика разной квалификации выложили кирпичную стену, причем 1-й каменщик проработал 6 ч, 2-й — 4 ч, 3-й — 7 ч. Если бы 1-й каменщик работал 4 ч, 2-й — 2 ч, 3-й — 5 ч, то было бы выполнено 2/3 всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали все вместе одно и то же время?

Р е ш е н и е .

Пусть вся работа равна 1. Обозначим x, y и z производительность первого, второго и третьего каменщиков, т.е. ту часть работы, которую каждый из них выполняет за час.

	P (часть работы за 1 час)	t (ч)	A
I	x	6	$6x$
II	y	4	$4y$
III	z	7	$7z$

$6x + 4y + 7z = 1$

	P (часть работы за 1 час)	t (ч)	A
I	x	4	$4x$
II	y	2	$2y$
III	z	5	$5z$

$4x + 2y + 5z = \frac{2}{3}$

Таким образом, мы получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 7z = 1, \\ 4x + 2y + 5z = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на 2 и вычтем из него первое уравнение: $2x + 3z = \frac{1}{3}$. Из первого уравнения системы, умноженного на 2, вычтем второе уравнение, умноженное на 3: $2y - z = 0$.

Система имеет вид:

$$\begin{cases} 2x + 3z = \frac{1}{3}, \\ 2y - z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 9z = 1, \\ z = 2y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1 - 18y}{6}, \\ z = 2y. \end{cases}$$

В задаче нужно найти время, за которое каменщики закончат всю кладку стены, работая одновременно, то есть величину

$$\frac{1}{x + y + z} = \frac{1}{\frac{1 - 18y}{6} + y + 2y} = \frac{6}{1 - 18y + 6y + 12y} = 6 \text{ (ч)}.$$

О т в е т : 6 ч.

Пример 2

Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на 2 листа более установленной для нее нормы, то закончит работу ранее намеченного срока на 3 дня; если же будет печатать по 4 листа сверх нормы, то окончит работу на 5 дней раньше срока. Сколько листов она должна была перепечатать и в какой срок?

Р е ш е н и е .

Заполним таблицу, используя условие задачи:

	P (лист/дни)	t (дни)	A (листы)
Норма	x	y	xy
План 1	$x + 2$	$y - 3$	$(x + 2)(y - 3)$
План 2	$x + 4$	$y - 5$	$(x + 4)(y - 5)$

Составим два уравнения, исходя из того, что работа не изменилась:

$$\begin{cases}(x+2)(y-3)=xy,\\(x+4)(y-5)=xy.\end{cases}$$

Раскрыв в каждом уравнении скобки и приведя подобные, получим:

$$\begin{cases}2y-3x=6,\\4y-5x=20,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x=8,\\y=15.\end{cases}$$

Следовательно, машинистка должна была перепечатать за 15 дней 120 листов.

О т в е т : 120 листов, 15 дней.

Пример 3

Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала 1-й кран был открыт 1/3 того времени, которое требуется для наполнения бассейна только через один 2-й кран. Затем наоборот. После этого оказалось наполненным 13/18 бассейна. Сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым краном в отдельности, если оба крана, открытые вместе, наполняют бассейн за 3 ч 36 мин?

Р е ш е н и е .

1)

	P (часть бассейна в 1 ч)	t (ч)	A
I кран	$\frac{1}{x}$	x	1
II кран	$\frac{1}{y}$	y	1

2)

	P (часть бассейна в 1 ч)	t (ч)	A
I кран	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{3}y$	$\frac{y}{3x}$
II кран	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{3}x$	$\frac{x}{3y}$

$$\frac{y}{3x}+\frac{x}{3y}=\frac{13}{18}$$

3) 3 ч 36 мин = 3 ч $+\frac{3}{5}$ ч = $\frac{18}{5}$ ч

	P (часть бассейна в 1 ч)	t (ч)	A
I кран	$\frac{1}{x}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{18}{5x}$
II кран	$\frac{1}{y}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{18}{5y}$

$$\frac{18}{5x}+\frac{18}{5y}=1$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{y}{3x}+\frac{x}{3y}=\frac{13}{18},\\ \frac{18}{5x}+\frac{18}{5y}=1.\end{cases}$$

Обозначив $\frac{y}{x}=t$, запишем 1-е уравнение системы в виде:

$\frac{1}{3}t+\frac{1}{3t}=\frac{13}{18}$, откуда $t=\frac{2}{3}$ или $t=\frac{3}{2}$.

Таким образом, $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$ или $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$.

В первом случае $\begin{cases}y=\frac{2}{3}x,\\ \frac{18}{5x}+\frac{18}{\frac{10}{3}x}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}y=6,\\ x=9.\end{cases}$

Во втором случае $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x,\\ \frac{18}{5x}+\frac{18}{\frac{15}{2}x}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}y=9,\\ x=6.\end{cases}$

Ответ: 6 ч и 9 ч.

Пример 4

Бассейн наполняется четырьмя трубами за 4 часа. Первая, вторая и четвертая трубы, работая одновременно, заполняют бассейн за 6 часов; вторая, третья и четвертая — за 5 часов. За сколько времени заполнят бассейн первая и третья трубы?

Р е ш е н и е .

Пусть V — объем бассейна (л), x, y, z, u — производительность I, II, III, IV труб соответственно (л/час). Тогда имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (x+y+z+u)\cdot 4=V, \\ (x+y+u)\cdot 6=V, \\ (y+z+u)\cdot 5=V. \end{cases}$$

Система содержит три уравнения и пять неизвестных. Нет необходимости определять все пять неизвестных величин, нужно найти лишь искомую величину: $\dfrac{V}{x+z}$ ч.

Перепишем систему в виде: $\begin{cases} \dfrac{x}{V}+\dfrac{y}{V}+\dfrac{z}{V}+\dfrac{u}{V}=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{x}{V}+\dfrac{y}{V}+\dfrac{u}{V}=\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{y}{V}+\dfrac{z}{V}+\dfrac{u}{V}=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе, получим $\dfrac{z}{V}=\dfrac{1}{12}$.

Вычтем из первого уравнения третье: $\dfrac{x}{V}=\dfrac{1}{20}$.

Тогда $\dfrac{x}{V}+\dfrac{z}{V}=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{2}{15}$; $\qquad \dfrac{V}{x+z}=\dfrac{15}{2}$.

О т в е т : 7,5 ч.

Задачи для самостоятельного решения

1. Двое рабочих, работая вместе, выполняют всю работу за 8 часов. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 12 часов скорее, чем второй рабочий, если этот последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить работу?

О т в е т : 12 ч, 24 ч.

2. Для заполнения бассейна были открыты две трубы, по которым подавали воду $\dfrac{1}{4}$ часа, затем открыли третью трубу, и через 5 минут бассейн был заполнен, а все три трубы закрыты. Производительность второй трубы в 1,2 раза больше производительности первой. Через вторую и третью трубы, открытые одновременно,