$\frac{21}{32}$. Найти знаменатель этой прогрессии, если число членов в прогрессии четное.

Ответ: 0,5.

6. Найти все трехзначные числа, кратные 45, цифры которых образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: 630, 135, 765.

7. Найти натуральное трехзначное число, если его цифры образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, меньшего на 400, образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: 931.

8. Найти возрастающую арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

Ответ: 5, 9, 13, … .

9. Сумма пятого, девятого, шестнадцатого и двадцать второго членов арифметической прогрессии равна 20. Найти сумму первых 25 членов этой прогрессии.

Ответ: 125.

10. Три числа $\cos 6\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\cos 2\alpha$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найти α.

Ответ: $\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z;\quad \frac{\pi}{4}(1+2k),\quad k\in Z.$

Задачи на числовые зависимости

При решении задач на числовые зависимости полезно помнить следующие сведения.

1) Если натуральное число A имеет n знаков, то

$$A=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot 10+a_n,$$

где a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, … a_1 — соответственно количество единиц, десятков, сотен, … в числе A. Например: $2364 = 2\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 4$,

a_1, a_2, … a_{n-1}, a_1 — цифры числа A.

2) Нужно понимать разницу между терминами «число» и «цифра». В десятичной системе счисления десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При помощи этих цифр можно записать любое число. Например: число $2996 = 2\cdot 10^3 + 9\cdot 10^2 + 9\cdot 10 + 6$.

3) Если к натуральному числу A справа приписать n-значное число B, то получим число $A \cdot 10^n + B$.
4) Если к n-значному числу A приписать слева число B, то получим число $B \cdot 10^n + A$.
5) Если дано число, записанное цифрами $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ (его обычно записывают в виде $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$), то оно равно
$\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$.
6) Если при делении натурального числа A на натуральное число B в частном получится q, а в остатке $r(r < B)$, то $A = B \cdot q + r$.

Пример 1

Найти двузначное число, зная, что число его единиц на 4 меньше числа его десятков, а произведение искомого числа и суммы его цифр равно 1330.

Решение.

Пусть $\overline{xy}$ — искомое двузначное число, то есть $\overline{xy} = 10x + y$.

По условию число единиц на 4 меньше числа десятков.

Следовательно, $x - y = 4$.

Произведение искомого числа и суммы его цифр равно 1330, то есть

$(10x + y) \cdot (x + y) = 1330$.

Из системы $\begin{cases} x - y = 4, \\ (10x + y) \cdot (x + y) = 1330 \end{cases}$

находим: $x_1 = 9$ или $x_2 = \frac{73}{11}$. x_2 не удовлетворяет условию, так как x — цифра.

Таким образом, $x = 9$, $y = 5$. Искомое число 95.

Ответ: 95.

Пример 2

Сумма цифр двузначного числа равна 15. Если к искомому числу прибавить 27, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

Решение.

Пусть $\overline{xy}$ — искомое число; x — цифра десятков, y — цифра единиц. Тогда $\overline{xy} = 10x + y$.

Из условия задачи следует, что $x + y = 15$ и $10x + y + 27 = 10y + x$.

Получим систему уравнений:

$\begin{cases} x+y=15, \\ 9x-9y=-27; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=15, \\ x-y=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=6, \\ y=9. \end{cases}$

Ответ: 69.

Пример 3

Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 6 и в остатке 11. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 2 и в остатке 5. Найти это число.

Решение.

Пусть $\overline{xy}$ — искомое число; x — цифра десятков, y — цифра единиц. Тогда $\overline{xy}=10x+y$.

По условию задачи $10x + y = 6(x + y) + 11$ и $10x + y = 2xy + 5$.

Решая систему равнений:

$$\begin{cases} 10x+y=6(x+y)+11, \\ 10x+y=2xy+5, \end{cases}$$

получим $x_1 = 9$; $y_1 = 5$; $x_2=\frac{1}{2}$; $y_2=1{,}8$. Условию задачи удовлетворяет только первая пара.

Ответ: 95.

Пример 4

Запись шестизначного числа начинается цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

Решение.

Обозначив через x пятизначное число, следующее за цифрой 1, получим, что искомое число равно $100\,000 + x$. Если цифру 1 перенести на последнее место, то новое число будет равно $10x + 1$. По условию задачи $10x + 1 = 3(100\,000 + x)$.

Отсюда получаем: $x = 42\,857$.

Ответ: первоначальное число равно 142 857.

Пример 5

Ученик должен был перемножить два трехзначных числа. Но он не заметил знака умножения и принял оба рядом стоящие множители за одно шестизначное число. Поэтому полученное произведение оказалось в семь раз больше истинного. Найти оба множителя.

Р е ш е н и е .

Обозначим первый множитель a, а второй b. Тогда истинное произведение будет равным $a \cdot b$, а шестизначное число $\overline{ab}$, где a и b трехзначные числа. $\overline{ab} = 1000a + b$.

По условию задачи $\overline{ab} = 7ab,$ то есть $1000\,a + b = 7ab$. Выразим из этого уравнения a через b:

$$a = \frac{b}{7b - 1000}.$$

Так как $7b - 1000 > 0$, то $b > 142{,}8$. Кроме того, $a \geq 100$ как трехзначное число.

Таким образом, $\frac{b}{7b-1000} \geq 100;$ $b \geq 700b - 100000;$ $b < 143{,}06.$ Но b — целое число и $142{,}8 < b < 143{,}06$.

Следовательно, $b = 143;$ $a = \frac{143}{7 \cdot 143 - 1000} = \frac{143}{1} = 143.$

О т в е т : 143 и 143.

Пример 6

Если к натуральному двузначному числу x, сумма цифр которого равна 10, прибавить 44, то получится такое число y, что произведение его цифр равно 12. Найти число x.

Р е ш е н и е .

Число x — двузначное, то есть $10 \leq x \leq 99$,
поэтому $54 \leq y = x + 44 \leq 143$.

Известно также, что произведение цифр числа y равно 12.

Учитывая ограничение $54 \leq y \leq 143$, найдем возможные числа $y_1 = 143$, $y_2 = 126$, $y_3 = 134$, $y_4 = 62$. Найдя числа $x_1 = 99$, $x_2 = 82$, $x_3 = 90$, $x_4 = 18$, видим, что условию удовлетворяет $x_2 = 82$, так как сумма цифр равна 10.

О т в е т : 82.

Задачи для самостоятельного решения

1. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 3, а в остатке 5. Найти это число.

   О т в е т : 38.