до B через 2 часа, а второй доходит до A через 8 часов. Определить скорость первого пешехода.

Ответ: 4 км/ч.

6. Расстояние между A и B равно 156 км. Из A в B выезжает велосипедист. Через 2 часа из B ему навстречу отправляется другой велосипедист со скоростью на 4 км/ч большей, чем скорость первого велосипедиста. Встреча произошла на расстоянии 72 км от B. Найти сумму скоростей обоих велосипедистов.

Ответ: 32 км/ч.

7. Две точки движутся по окружности длиной 27 см с постоянными скоростями. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются каждые 9 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую каждые 45 с. Найти скорости точек.

Ответ: 0,018 м/с; 0,012 м/с.

8. Из пункта A в пункт B против течения выехала моторная лодка. В пути сломался мотор, и, пока его 15 минут чинили, лодку снесло вниз по реке. Определить, на сколько позднее приплыла лодка в пункт B, если известно, что путь из пункта A в пункт B лодка проходит в 2,5 раза дольше, чем путь из B в A.

Ответ: $\frac{7}{16}$ ч.

9. Города A и B расположены на берегу реки, причем B расположен ниже по течению. В 9 ч утра из A в B отправляется плот, плывущий относительно берегов реки со скоростью течения реки. В тот же момент из B в A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 часов. Доплыв до A, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом. Успели ли лодка и плот прибыть в город к 9 часам вечера того же дня?

Ответ: нет.

10. Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 секунды; стоя на ступеньке движущегося эскалатора — за 56 секунд. За сколько секунд спустится пассажир, если он идет по неподвижному эскалатору?

Ответ: за 42 с.

Задачи на проценты

При решении задач на проценты необходимо помнить следующее:

1) 1% — это сотая часть числа.

2) Процент от числа находится умножением. Например, чтобы найти 35% от 410, надо число 410 умножить на дробь 0,35: $410 \cdot 0{,}35 = 143{,}5$. Значит, 35% от 410 составляет 143,5.
3) Число по его проценту находится делением. Так, например, чтобы найти число, 18% которого равны 27, надо 27 разделить на 0,18, то есть $27 : 0{,}18 = 150$. Значит, число, 18% которого равны 27, есть 150.
4) Чтобы узнать, сколько процентов первое число составляет от второго, надо первое число разделить на второе и результат умножить на 100. Например, найдем, сколько процентов от числа 200 составляет число 125:
$\frac{125}{200} \cdot 100\% = 62{,}5\%$.
5) В задачах на проценты часто возникает ситуация, когда надо найти процент от процента:
когда некоторая величина A_0 изменяется на p% за некоторый промежуток времени. Затем ее новое значение опять изменяется на p%. Если этот процесс содержит ***n*** этапов, то тогда окончательное значение рассматриваемой величины
$$A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n. \qquad (1)$$
6) Если величина A_0 изменяется на первом этапе на p_1%, на втором — на p_2% и т.д. до p_n% на последнем этапе, то окончательное значение этой величины вычисляется по формуле:
$$A_n = A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\left(1+\frac{p_3}{100}\right)\ldots\left(1+\frac{p_n}{100}\right). \qquad (2)$$
7) Средний процент прироста q% определяется по формуле:
$$A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\left(1+\frac{p_3}{100}\right)\ldots\left(1+\frac{p_n}{100}\right) = A_0\left(1+\frac{q}{100}\right)^n. \qquad (3)$$
8) Пусть сосуд объемом V_0 содержит p% раствор, и из сосуда выливается a л смеси и доливается a л воды, после чего раствор перемешивается. Эта процедура повторяется n раз. Концентрация раствора после n процедур определяется формулой:
$$C_n = \frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n. \qquad (4)$$

9) Если в предыдущем случае в сосуд каждый раз доливается не вода, а раствор того же вещества с постоянной концентрацией $q\%$, то концентрация раствора после n процедур определяется формулой

$$C_n = \frac{p}{100} + \frac{p-q}{100}\left(\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n - 1\right).$$

Пример 1

Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие — 20% воды. Сколько сухих фруктов получится из 30 кг свежих фруктов?

Решение.

1) Так как свежие фрукты содержат 72% воды, то 28% в них — «сухое вещество». Найдем 28% от 30 кг:
   $30 \cdot 0{,}28 = 8{,}4$ (кг).

Таким образом, в 30 кг свежих фруктов содержится 8,4 кг «сухого вещества» (здесь найден процент от числа).

2) Так как 8,4 кг «сухого вещества» составляют 80% в сухих фруктах, то найдем количество сухих фруктов, разделив 8,4 на 0,8:
   $8{,}4 : 0{,}8 = 10{,}5$ (кг).

Таким образом, из 30 кг свежих фруктов получится 10,5 кг сухих фруктов.

Ответ: 10,5 кг.

Пример 2

Из 22 кг свежих грибов получено 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Какой процент воды содержат свежие грибы?

Решение.

1) Сухие грибы помимо 12% воды содержат 88% «сухого вещества». Найдем количество «сухого вещества» в 2,5 кг сухих грибов (нахождение процента от числа):
   $2{,}5 \cdot 0{,}88 = 2{,}2$ (кг).
2) Это количество «сухого вещества» содержится и в 22 кг свежих грибов. Найдем, какую часть от 22 кг составляют 2,2 кг:
   $\frac{2{,}2 \cdot 100\%}{22} = 10\%.$

Таким образом, 10% из 22 кг составляет «сухое вещество», а остальные 90% — вода.

Ответ: 90%.

Пример 3

Цену товара снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Решение.

Воспользуемся формулой (2): $p_1 = 20\%$, $p_2 = 15\%$, $p_3 = 10\%$, A_0 — первоначальная цена, A_n — цена после трех «уценок»: $A_n = A_0(1 - 0{,}2)(1 - 0{,}15)(1 - 0{,}1)$;

$A_n = A_0 \cdot 0{,}612$.

Таким образом, новая цена составляет 61,2% первоначальной цены (100%), то есть цена снижена на 38,8%.

Ответ: 38,8%.

Примечание. В формуле (2) мы изменили знак «+» на «–», так как речь идет не об увеличении, а о снижении цены.

Пример 4

Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды необходимо добавить к 180 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составило 4%?

Решение.

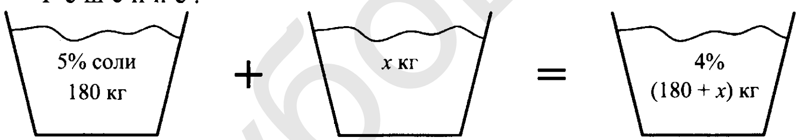

Рис. 14

1) Найдем количество пресной воды в 180 кг морской воды. Для этого нужно найти 95% от 180 кг:
$180 \cdot 0{,}95 = 171$ (кг).
2) Найдем количество пресной воды в $(180 + x)$ кг морской воды с содержанием соли 4%. Для этого нужно найти 96% от $(180 + x)$ кг, то есть
$(180 + x) \cdot 0{,}96 = 172{,}8 + 0{,}96x$ (кг).
3) Составим уравнение: $171 + x = 172{,}8 + 0{,}96x$.
Решив уравнение, найдем $x = 45$.
Ответ: 45 кг.

Пример 5

В первом сосуде находится 500 мл 70%-ного раствора кислоты, во втором — 200 мл 90%-ного раствора кислоты. Сколько миллилитров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в первом сосуде получился 75%-ный раствор кислоты?

Решение:

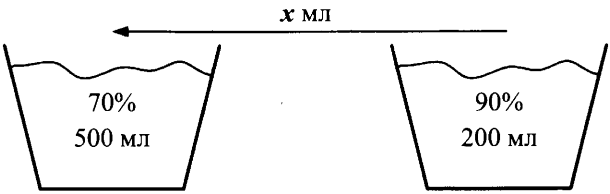

Рис. 15

1) Пусть перелили x мл раствора из второго сосуда в первый. В x мл этого раствора содержится $0{,}9x$ мл кислоты, так как раствор 90%-ной.
2) В первом сосуде содержится 70% кислоты, то есть $0{,}7 \cdot 500$ мл = = 350 мл.
3) После того как из второго сосуда перелили x мл раствора в первый сосуд, в первом сосуде стало $(350 + 0{,}9x)$ мл кислоты.
4) Найдем новую концентрацию раствора кислоты в первом сосуде, составив пропорцию:

   $(350 + 0{,}9x)$ мл кислоты — α%

   $(500 + x)$ мл кислоты — 100%

   Из пропорции найдем α:

   $$\alpha = \frac{(350+0{,}9x)\cdot 100}{500+x}\%, \text{ то есть } \alpha = \frac{35000+90x}{500+x}\%.$$

5) По условию задачи $\alpha = 74\%$.

   $$\frac{35000+90x}{500+x} = 74;\ 35000 + 90x = 37000 + 74x;\ 16x = 2000;\ x = 125.$$

   Ответ: 125 мл.

Пример 6

Выпуск продукции за год работы предприятия возрос на 8%. На следующий год он увеличился на 10%. Определить средний прирост продукции за этот период.

Решение.

Обозначим средний ежегодный прирост продукции через q%. Тогда по формуле (3):

$$\left(1+\frac{8}{100}\right)\left(1+\frac{10}{100}\right)=\left(1+\frac{q}{100}\right)^2.$$

Отсюда находим $q = \sqrt{108 \cdot 110} - 100 \approx 8{,}99$.

Ответ: 8,99%.

Пример 7

В сосуде было 16 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой. Затем отлили столько же и опять долили водой. Сколько отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-ный раствор кислоты?

Решение.

Воспользуемся формулой (4): $C_n = \frac{p}{100}\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n$;

$C_n = 25\% = \frac{25}{100}$; $p = 100\%$; $a = x$; $V_0 = 16$ л; $n = 2$

$\frac{25}{100} = \frac{100}{100}\left(1 - \frac{x}{16}\right)^2$; $\left(1 - \frac{x}{16}\right)^2 = \frac{25}{100}$; $1 - \frac{x}{16} = \frac{1}{2}$; $x = 8$

Ответ: 8 л.

Пример 8

Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 л глицерина и в сосуд долили 2 л воды. После перемешивания из него снова отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. В результате объем воды стал в 26 раз больше объема глицерина. Найти объем сосуда.

Решение.

Так как в результате объем воды стал в 26 раз больше объема глицерина, то объемная концентрация глицерина $C_n = \frac{V_{\text{гл}}}{V_0} = \frac{1}{27}$.

Воспользуемся формулой (4): $\frac{1}{27} = \frac{100}{100}\left(1 - \frac{2}{V_0}\right)^2$.

Решив это уравнение, найдем $V_0 = \frac{27 + 3\sqrt{3}}{13}$.

Ответ: $\frac{27 + 3\sqrt{3}}{13}$ л.

Пример 9

Два сосуда одинакового объема наполнены раствором соли одинаковой концентрации. Из первого сосуда отлили $2a$ л раствора и долили $2a$ л воды. Из второго сосуда отлили $3a$ л раствора и долили $3a$ л воды. Потом эту процедуру повторили еще два раза. В результате концентрация кислоты в первом сосуде оказалась в $\frac{27}{8}$ раз больше, чем концентрация кислоты во втором сосуде. Какую часть от объема сосуда составляют a литров?

Решение.

Используя формулу (4), имеем

$$\frac{p}{100}\left(1-\frac{2a}{V_0}\right)^3=\frac{27}{8}\cdot\frac{p}{100}\left(1-\frac{3a}{V_0}\right)^3 \text{ или } \left(1-\frac{2a}{V_0}\right)^3=\frac{27}{8}\left(1-\frac{3a}{V_0}\right)^3.$$

Извлечем из обеих частей уравнения кубический корень:

$$1-\frac{2a}{V_0}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{3a}{V_0}\right);\quad 1-\frac{2a}{V_0}=\frac{3}{2}-\frac{9a}{2V_0};$$

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{a}{V_0}=\frac{1}{2};\quad \frac{a}{V_0}=\frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Можно задачи, в условии которых присутствуют несколько растворов (сплавов) решать, и не применяя формулу (4). Рассмотрим несколько примеров.

Пример 10

В сосуде было 20 л чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд долили водой. Затем отлили столько же литров смеси и сосуд опять долили водой. После этого в сосуде оказалось чистого спирта втрое меньше, чем воды. Сколько спирта отлили в первый раз?

Решение.

Будем заносить в таблицу данные о количестве растворов, объеме спирта в этих растворах и процентном содержании спирта в каждом растворе:

Количество растворов	Объем раствора	Содержание спирта	Концентрация раствора
I раствор	20 л	20 л	100%
II раствор	$(20-x+x)=20$ л	$(20-x)$ л	$\frac{(20-x)\cdot 100}{20}\% = A\%$
III раствор	$(20-x+x)=20$ л	$\left(20-x-\frac{Ax}{100}\right)$ л $= B$л	$\frac{B\cdot 100}{20}\% = C\%$

Поясним, что x л — количество жидкости, отливаемое каждый раз.

Так как для получения II раствора отлили x л чистого спирта (концентрация I раствора — 100%), то содержание спирта во II растворе стало $(20 - x)$ л. Соответственно изменилась и концентрация II раствора. Новую концентрацию можно найти, решив пропорцию:

20 л — 100%

$(20 - x)$ л — A%

Откуда $A = \frac{(20-x)100}{20}\%$.

Третий раствор по объему равен двум предыдущим, так как отливали и доливали одинаковое количество жидкости.

Содержание спирта в III растворе уменьшается по сравнению со II раствором. Найдем это уменьшение. Из II раствора отлили x л с концентрацией A%, то есть с x л II раствора «ушло» $\frac{Ax}{100}$ л спирта. Тогда содержание спирта в III растворе стало $\left(20 - x - \frac{Ax}{100}\right)$ л.

Обозначив это количество B л, найдем концентрацию III раствора, решив пропорцию:

20 л — 100%

B л — C%

Откуда $C = \frac{B \cdot 100}{20}\%$.

Так как в III растворе чистого спирта оказалось втрое меньше, чем воды, то $B = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$ (л).

Решим уравнение.

$20 - x - \frac{Ax}{100} = 5;$ $20 - x - \frac{(20-x)x}{20} = 5;$

$400 - 20x - 20x + x^2 - 100 = 0;$

$x = 10$ или $x = 30$

$x = 30$ не удовлетворяет условию задачи, так как в сосуде было 20 л спирта.

Ответ: 10 л.

Пример 11

Имеются два сплава с различным процентным содержанием свинца. Масса одного 6 кг, другого 12 кг. От каждого из них отрезали по куску равной массы, после чего сплавили отрезанные куски с остатком другого куска. В результате процентное содержание свинца в полученных сплавах стало одинаковым. Какова масса отрезанного куска?

Р е ш е н и е.

Сплавы	Масса	Вещество (свинец)	Процентное содержание вещества
I сплав	6 кг	$\frac{6\alpha}{100}$ кг	$\alpha\%$
II сплав	12 кг	$\frac{12\beta}{100}$ кг	$\beta\%$
III сплав	$(6-x+x)=6$ кг	$\left(\frac{6\alpha}{100}-\frac{\alpha x}{100}+\frac{\beta x}{100}\right)=A$ кг	$\frac{A\cdot 100}{6}\%=\gamma\%$
IV сплав	$(12-x+x)=12$ кг	$\left(\frac{12\beta}{100}-\frac{\beta x}{100}+\frac{\alpha x}{100}\right)=C$ кг	$\frac{C\cdot 100}{12}\%=\nu\%$

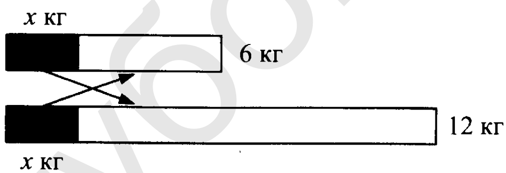

Рис. 16

Поясним, что x кг — масса, которую отрезают от каждого куска.

Обозначив процентное содержание свинца в I сплаве за $\alpha\%$, а во втором сплаве за $\beta\%$, найдем количество свинца в I сплаве $\left(\frac{6\alpha}{100}\right)$ кг и во II сплаве $\left(\frac{12\beta}{100}\right)$ кг.

Третий сплав получается, если от 6 кг первого сплава отрезать x кг и сплавить оставшуюся часть с x кг второго сплава. Найдем количество свинца в III сплаве. Свинца в III сплаве будет $\left(\frac{6\alpha}{100}-\frac{\alpha x}{100}+\frac{\beta x}{100}\right)$ кг, так как в I сплаве было $\left(\frac{6\alpha}{100}\right)$ кг свинца, с x кг первого сплава «ушло» $\left(\frac{\alpha x}{100}\right)$ кг (так как I сплав α%-ный), с x кг второго сплава поступит $\left(\frac{\beta x}{100}\right)$ кг (так как II сплав β%-ный).

Обозначив это количество свинца в III сплаве за A кг, найдем процентное содержание III сплава:

6 кг — 100%

A кг — γ%

Откуда $\gamma = \frac{A \cdot 100}{6}$%.

Аналогично заполняем таблицу сведениями о IV сплаве.

По условию задачи в III и IV сплавах процентное содержание свинца стало одинаковым:

$\gamma = \nu$, то есть $\frac{A \cdot 100}{6} = \frac{C \cdot 100}{12}$; $\frac{1}{6}(6\alpha - \alpha x + \beta x) = \frac{1}{12}(12\beta - \beta x + \alpha x)$;

$12\alpha - 2\alpha x + 2\beta x = 12\beta - \beta x + \alpha x$; $12(\alpha - \beta) - 3x(\alpha - \beta) = 0$;

$(\alpha - \beta)(12 - 3x) = 0$; так как $\alpha \neq \beta$, то $x = 4$.

Ответ: 4 кг.

Пример 12

Вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $\frac{3}{5}$ некоторой суммы положили в I банк, а остальную часть — во II банк. К концу года сумма этих вкладов составила 590 д. е., к концу следующего года — 701 д. е. Если бы первоначально $\frac{3}{5}$ исходного количества денег положили во II банк, а оставшуюся часть — в I банк, то через год сумма вкладов была бы 610 д. е. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

Решение.

1) Пусть $a_{\text{д.е.}}$ — вся сумма; k% — процент первого банка; n% — процент второго банка.

   Обозначим $\frac{k}{100} = b$; $\frac{n}{100} = c$.

2) Если в первый банк положили $\frac{3}{5}a$ д. е., то через год там будет

   $\frac{3}{5}a\left(1 + \frac{k}{100}\right) = \frac{3}{5}a(1 + b)$ д. е. (по формуле 1).

Через два года — $\frac{3}{5}a\left(1+\frac{k}{100}\right)^2=\frac{3}{5}a(1+b)^2$.

3) Аналогично, если во второй банк положить $\frac{2}{5}a$ д. е., то через год там будет $\frac{2}{5}a(1+c)$ д. е. (по формуле 1).

Через два года — $\frac{2}{5}a(1+c)^2$.

Составим таблицу для первого случая размещения.

	I банк	II банк	Всего
Вклад	$\frac{3}{5}a$ д. е.	$\frac{2}{5}a$ д. е.	a д. е.
I год	$\frac{3}{5}a(1+b)$ д. е.	$\frac{2}{5}a(1+c)$ д. е.	590 д. е.
II год	$\frac{3}{5}a(1+b)^2$ д. е.	$\frac{2}{5}a(1+c)^2$ д. е.	701 д. е.

Для второго случая размещения:

	I банк	II банк	Всего
Вклад	$\frac{2}{5}a$ д. е.	$\frac{3}{5}a$ д. е.	a д. е.
I год	$\frac{2}{5}a(1+b)$ д. е.	$\frac{3}{5}a(1+c)$ д. е.	610 д. е.
II год	$\frac{2}{5}a(1+b)^2$ д. е.	$\frac{3}{5}a(1+c)^2$ д. е.	Z

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}a(b+1)+\frac{2}{5}a(c+1)=590, & (1)\\ \frac{3}{5}a(b+1)^2+\frac{2}{5}a(c+1)^2=701, & (2)\\ \frac{3}{5}a(c+1)+\frac{2}{5}a(b+1)=610, & (3)\\ \frac{3}{5}a(c+1)^2+\frac{2}{5}a(b+1)^2=Z. & (4) \end{cases}$$

Умножим уравнение (1) на ($-\frac{3}{2}$) и сложим с уравнением (3):

$-\frac{1}{2}a(b+1)=-275$, откуда получаем: $b+1=\frac{550}{a}$.

Умножим (3) уравнение на $\left(-\frac{3}{2}\right)$ и сложим с (1) уравнением:

$-\frac{1}{2}a(c+1)=-325$, откуда получаем: $c+1=\frac{650}{a}$.

Подставим $b+1=\frac{550}{a}$ и $c+1=\frac{650}{a}$ во второе уравнение системы:

(2) : $\frac{3}{5}a\left(\frac{550}{a}\right)^2+\frac{2}{5}a\left(\frac{650}{a}\right)^2=701$, решим это уравнение, найдем $a=500$.

Тогда $b+1=\frac{550}{500}=1{,}1$ и $c+1=\frac{650}{500}=1{,}3$.

Четвертое уравнение системы примет вид:

$\frac{3}{5}\cdot 500\cdot 1{,}3^2+\frac{2}{5}\cdot 500\cdot 1{,}1^2=Z$, то есть $Z=749$.

Ответ: 749 д. е.

Пример 13

Курс «прогалика» в течение двух месяцев уменьшался на одно и то же, не превышающее 22, число процентов. В начале первого месяца господин К. имел некоторую сумму в «чепиках», которую он тогда же конвертировал в «прогалики». Двое других господ, имея каждый суммы в «прогаликах» в 6,25 раза больше, чем та, которую получил господин К. от совершенной им валютной операции, конвертировали их в «чепики»: один — в конце первого месяца, а другой — в конце второго. При этом у одного из них «чепиков» оказалось больше ровно на столько, сколько господин К. имел в начале первого месяца. На сколько процентов за два месяца вырос курс «чепика»?

Решение.

1) Пусть 1 «прогалик» = k «чепикам» (курс).
2) «Прогалик» падал на $\alpha\% \le 22\%$ каждый месяц из двух.

I месяц (конец)	II месяц (конец)
1 «прогалик» = $k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)$ «чепиков»	1 «прогалик» = $k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2$ «чепик»
1 «чепик» = $\frac{1}{k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)}$ «прогаликов»	1 «чепик» = $\frac{1}{k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2}$ «прогалик»

3)

	I месяц		II месяц	
	начало	конец	начало	конец
господин К.	было x «чепиков» $= \frac{x}{k}$ «прогаликов»	—	—	—
I господин	$\frac{6,25x}{k}$ «прогаликов»	$\frac{6,25x}{k} \times k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)$ «чепиков»	—	—
II господин	$\frac{6,25x}{k}$ «прогаликов»	—	—	$\frac{6,25x}{k} \times k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2$ «чепиков»

4) Так как курс «прогалика» падал, то у II господина «чепиков» меньше:

$$\frac{6,25x}{k} \cdot k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right) - \frac{6,25x}{k} \cdot k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2 = x,$$

$$6,25\left(1-\frac{\alpha}{100}\right) - 6,25\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2 = 1;$$

$\alpha^2 - 100\alpha + 1600 = 0,$

$\alpha = 80\%$ — не удовлетворяет условию задачи;

$\alpha = 20\%$ — ежемесячное падение курса «прогалика».

5) Узнаем, насколько вырос «чепик» за два месяца.

начало I месяца	конец II месяца
1 «чепик» $= \frac{1}{k}$ «прогаликов»	1 «чепик» $= \frac{1}{k\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)^2} = \frac{1}{k\left(1-\frac{20}{100}\right)^2} = \frac{1}{k \cdot \frac{16}{25}} = \frac{25}{16k}$ «прогаликов»

6) Составим пропорцию:

1 «чепик» — $\frac{1}{k}$ «прогаликов» — 100%

1 «чепик» — $\frac{25k}{16}$ «прогаликов» — y%

Решив эту пропорцию, получим 156,25%.

7) 156,25% – 100% = 56,25%

Ответ: на 56,25%.

Пример 14

Курс «прогалика» по отношению к «чепику» падает на $28\frac{4}{7}$% в квартал. Что выгоднее:

а) сделать вклад в «чепиках» на год с начислением 60% годовых или

б) конвертировать «чепики» в «прогалики» и сделать вклад в «прогаликах» с начислением 510% годовых?

Решение.

1)

Начало года	Конец года
1 «прогалик» = = k «чепиков» (курс)	1 «прогалик» = $k\left(1-\frac{2}{7}\right)^4$ «чепиков» = $k\left(\frac{5}{7}\right)^4$ «чепиков»
1 «чепик» = = $\frac{1}{k}$ «прогаликов»	1 «чепик» = $\frac{1}{k\left(1-\frac{2}{7}\right)^4}=\frac{1}{k\left(\frac{5}{7}\right)^4}$ «прогаликов»

2)

Начало года	Конец года
а) было x «чепиков»	$x + 0{,}6x = 1{,}6x$ «чепиков» = $=\frac{1{,}6x}{k\left(1-\frac{28\frac{4}{7}}{100}\right)^4}=\frac{1{,}6x}{k\left(\frac{5}{7}\right)^4}$ «прогаликов»
б) было x «чепиков» = = $\frac{x}{k}$ «прогаликов»	$\frac{x}{k}+5{,}1\cdot\frac{x}{k}=6{,}1\cdot\frac{x}{k}$ «прогаликов»

3) Сравним суммы в «прогаликах» в конце года:

$$\frac{1{,}6x}{k\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^4} \vee 6{,}1\cdot\frac{x}{k}.$$

Сократим обе части сравнения на $\frac{x}{k}$.

Получим $\frac{1{,}6\cdot 7^4}{5^4} \vee 6{,}1$;

$1{,}6\cdot 7^4 \vee 6{,}1\cdot 5^4$; $3841{,}6 > 3812{,}5$.

Следовательно, $\frac{1{,}6x}{k\left(\frac{5}{7}\right)^4} > 6{,}1\cdot\frac{x}{k}$.

О т в е т : первый вариант выгоднее.

Пример 15

31 декабря 2015 года Петр взял в банке 3 310 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть долг увеличивается на 10%), затем Иван переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Петр выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Р е ш е н и е .

Пусть 3 100 000 рублей = A рублей — сумма кредита,

$n\% = \frac{n}{100} = 0{,}01n$ — годовой процент банка.

Заполним таблицу, составляя (при необходимости) пропорции.

Деньги / Годы	Долг на начало года (руб.)	Долг на конец года (руб.)	Выплатил (руб.)	Остаток долга (руб.)
I год	A	$A + 0{,}01nA =$ $= A(1+0{,}01n) = B$	x	$B - x = C$
II год	C	$C + 0{,}01nC =$ $= C(1 + 0{,}01n) = D$	x	$D - x = E$
III год	E	$E + 0{,}01nE =$ $= E(1 + 0{,}01n) = M$	x	$M - x = O$

Из условия задачи следует, что $M - x = O$, то есть $M = x$. Заменим M на значение из таблицы: $E(1 + 0{,}01n) = x$.

Заменим E на значение из таблицы:

$(D - x)\,(1 + 0{,}01n) = x$.

Так как $n = 10$, то $1 + 0{,}01n = 1{,}1$ и $(D - x) \cdot 1{,}1 = x$.

Заменим C и B значениями из таблицы:

$(C \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 = x$;

$((B - x) \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 = x$;

$((A \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 = x$;

$(A \cdot 1{,}21 - 1{,}1x - x) \cdot 1{,}1 = x$; $(1{,}21A - 2{,}1x) \cdot 1{,}1 = x$;

$1{,}331A - 2{,}31x = x$; $1{,}331A = 3{,}31x$;

$$x = \frac{1{,}331 \cdot A}{3{,}31} = \frac{1{,}331 \cdot 3310000}{3{,}31} = 1\,331\,000\,.$$

Ответ: 1 331 000 рублей.

Задачи для самостоятельного решения

1. Килограмм товара стоил 640 рублей. После снижения цены он стал стоить 570 рублей. На сколько процентов снижена цена? Ответ округлить до десятых долей процента.
   Ответ: 10,9%
2. Цену товара повысили на 20%, затем новую цену повысили на 35%. На сколько процентов повысили первоначальную цену?
   Ответ: на 62%.
3. Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие содержат 13% воды. Сколько получится сухих грибов из 17,4 кг свежих грибов?
   Ответ: 2 кг.
4. Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше массы первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке 10%, во втором — 40%. После сплавления этих двух слитков получился слиток, в котором процентное содержание меди равно 30%. Определить массу полученного слитка.
   Ответ: 9 кг.
5. В начале года в банк было внесено 1680 д. е., а в конце года взято обратно 880 д. е. Еще через год общая сумма вклада оказалась равной 928,2 д. е. Сколько процентов годового дохода дает банк?
   Ответ: 5%.