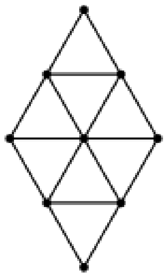
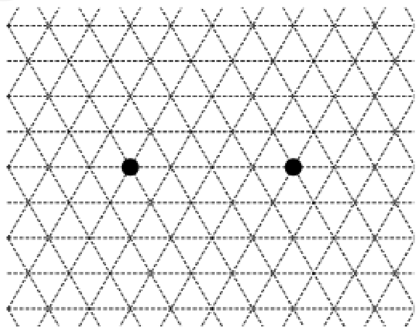
Целочисленные решётки

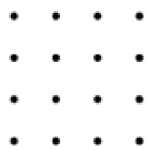
1. (*Московская устная олимпиада, 2012, 6.2*) Из 16 спичек сложен ромб со стороной в две спички, разбитый на треугольники со стороной в одну спичку (см. рисунок). А сколько спичек потребуется, чтобы сложить ромб со стороной в 10 спичек, разбитый на такие же треугольники со стороной в одну спичку?



2. (*Московская устная олимпиада, 2014, 6.2*) Коля и Макс живут в городе с треугольной сеткой дорог (см. рисунок). В этом городе передвигаются на велосипедах, при этом разрешается поворачивать только налево. Коля поехал в гости к Максу и по дороге сделал ровно 4 поворота налево. На следующий день Макс поехал к Коле и приехал к нему, совершив только один поворот налево. Оказалось, что длины их маршрутов одинаковы. Изобразите, каким образом они могли ехать (дома Коли и Макса отмечены).



3. (*«Высшая проба», 2017, 7.5*) Дана квадратная решётка 4×4 точек (то есть решётка 3×3 с отмеченными 4×4 вершинами всех клеток). Какое минимальное число треугольников нужно нарисовать, чтобы каждая точка попала на границу одного из треугольников? Приведите пример с указанным Вами числом треугольников и докажите, почему меньше нельзя.

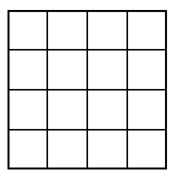


4. (*Математический праздник, 2006, 7.6*) Петя закрасил одну клетку прямоугольника. Саша может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все клетки прямоугольника (независимо от того, какую клетку выбрал Петя), если размеры прямоугольника

а) 8×9 клеток?

б) 8×10 клеток?

5. (*Московская устная олимпиада, 2009, 7.8*) Есть 40 одинаковых шнуров. Если поджечь любой шнур с одной стороны, он сгорает, а если с другой — не горит. Вася раскладывает шнуры в виде квадрата (см. рисунок, каждый шнур — сторона клетки). Затем Петя расставляет 12 запалов. Сможет ли Вася разложить шнуры так, что Пете не удастся сжечь все шнуры?



6. (*Московская устная олимпиада, 2010, 7.8*) Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2009, идущими по линиям сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4.