

## Задачи с целыми числами

Иногда в обычных с виду задачах возникают нестандартные ситуации — например, уравнение с двумя неизвестными, или система из уравнения и неравенства, или система неравенств. В таких случаях решающую роль играет тот факт, что одна или несколько переменных принимают только целочисленные значения.

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–9) Джеку Воробью нужно было разложить 150 пиастров по 10 кошелькам. После того как он положил некоторое количество пиастров в первый кошелек, в каждый следующий он клал больше, чем в предыдущий. В результате оказалось, что количество пиастров в первом кошельке не меньше, чем половина количества пиастров в последнем. Сколько пиастров находится в 6-м кошельке?

12

2. («Физтех», 2014, 7–8) 779 новогодних подарков разложены по мешкам. В некоторых мешках лежит по  $n$  подарков, в других — по 10 подарков. Какое наименьшее значение может принимать  $n$ , если всего 25 мешков?

2

3. («Ломоносов», 2015, 7–8) На день рождения Андрея последней пришла Яна, подарившая ему мяч, а предпоследним — Эдуард, подаривший ему калькулятор. Испытывая калькулятор, Андрей заметил, что произведение количества всех его подарков на количество подарков, которые были у него до прихода Эдуарда, ровно на 16 больше, чем произведение его возраста на количество подарков, которые были у него до прихода Яны. Сколько подарков у Андрея?

81

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 7–9) В ролевой игре «Worlds of MSU» имеются три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух классов (двойной класс), например, маг-целитель. Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель зла». Известно, что целителей (т. е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в  $k$  раз меньше, чем воинов ( $k$  — целое число, большее двух). Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что игроков, имеющих двойной класс, на 2 больше, чем целителей?

26

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–9) Найдите все натуральные числа, которые в 36 раз больше суммы своих цифр.

324 и 648

6. («Физтех», 2013, 8) Бак, полностью заполненный водой, разлили поровну в три бидона. При этом оказалось, что первый бидон заполнен водой на половину, второй — на  $2/3$ , третий — на  $3/4$ . Бак и все три бидона вмещают целое число литров. При каком наименьшем объёме бака (в литрах) возможна такая ситуация?

81

7. («Курчатов», 2015, 8) Ученику дано число  $x$ , записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Он вычислил три новых числа  $2x$ ,  $4x$  и  $5x$  (все они оказались не целыми и не полуцелыми). Каждое из трёх новых чисел ученик округлил до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 120. Найдите  $x$ . (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше  $1/2$ , и в большую, если дробная часть больше либо равна  $1/2$ .)

6  
86

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8) В школе учится не менее 150 мальчиков, а девочек — на 15% больше, чем мальчиков. Когда мальчики поехали на сборы, потребовалось 6 автобусов, причём в каждом автобусе ехало одинаковое количество школьников. Сколько всего человек учится в школе, если известно, что общее число учащихся не больше 400?

387

9. («Ломоносов», 2017, 9) На доске было написано 21 последовательное натуральное число. Когда одно из чисел стёрли, сумма оставшихся стала равна 2017. Какое число стёрли?

101

10. (Всеросс., 2014, II этап, 9) На доске записано несколько последовательных натуральных чисел. Ровно 52% из них — чётные. Сколько чётных чисел записано на доске?

13

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9) Число  $n + 2015$  делится на 2016, а число  $n + 2016$  делится на 2015. Найдите наименьшее натуральное  $n$ , при котором это возможно.

4058209

12. («Курчатов», 2015, 9) Ученику дано число  $x$ , записанное как обыкновенная дробь с однозначным знаменателем. Он вычислил три новых числа  $5x$ ,  $7x$  и  $9x$  (все они оказались не целыми). Каждое из трёх новых чисел ученик округлил до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 50. Найдите  $x$ . (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше  $1/2$ , и в большую, если дробная часть больше либо равна  $1/2$ .)

8  
11

13. («Курчатов», 2015, 10) Ученику дано число  $x$ : это обыкновенная дробь со знаменателем 9. Ученик вычислил три новых числа  $2x$ ,  $4x$  и  $5x$ , каждое из этих трёх чисел округлил до ближайшего целого и результаты округлений сложил. Получилось 111. Найдите  $x$ . (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше  $1/2$ , и в большую, если дробная часть больше либо равна  $1/2$ .)

6  
16

14. («Курчатов», 2014, 10) Пусть  $x, y, \frac{x+3}{y} + \frac{y+3}{x}$  и  $\frac{x^2+3}{y} + \frac{y^2+3}{x}$  — целые числа. Докажите, что тогда и число  $\frac{x^3+3}{y} + \frac{y^3+3}{x}$  — целое.

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) На соревнования по лёгкой атлетике ученики школы приехали на автобусе, вмещающем не более 40 человек. Каждый из них участвовал в одном из видов соревнований. При этом  $1/7$  часть учеников завоевали золотые медали,  $1/4$  часть — серебряные и ещё  $1/4$  — бронзовые. На обратном пути медалисты решили собрать деньги и купить по одному торту каждому из спортсменов, оставшемуся без медалей. Сколько тортов им придётся купить?

01

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) В контейнере находятся изделия нескольких типов из пяти возможных: весом 1 кг, 2 кг, 3 кг, 5 кг и 10 кг. Суммарный вес изделий в контейнере равен 100 кг. Известно, что если выбрать из контейнера по одному изделию каждого из имеющихся в нём типов, то их суммарный вес будет равен 15 кг. Количество самых тяжёлых из находящихся в контейнере изделий на 5 больше, чем количество всех остальных изделий в нём. Определите, какие типы изделий и в каком количестве находятся в контейнере.

01 100 кг весом изделия четыре, 3 и 2 весом изделия один

17. («Курчатов», 2014, 11) Пусть  $x, y, \frac{x+5}{y} + \frac{y+5}{x}$  и  $\frac{x^2+5}{y} + \frac{y^2+5}{x}$  — целые числа. Докажите, что тогда и число  $\frac{x^5+5}{y} + \frac{y^5+5}{x}$  — целое.

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Два брата родились в один день, но в разные годы. Оказалось, что в 2014 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Определите год рождения каждого из братьев.

002 и 8861

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Вася возвёл какое-то целое число в куб и умножил результат на два. Петя возвёл другое целое число в квадрат и умножил результат на три. Оказалось, что ответы совпали. Какое число взял каждый из ребят, если эти числа отличаются не более чем на 100 (перечислите все возможные варианты)?

06, 12, 12, 12, 24, 96

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) В школе было три урока. Но только 4 школьника были на всех уроках. Каждый из остальных «учеников» присутствовал только на двух уроках, а один из уроков прогулял. На математике в классе было 17 школьников, на физике — 18, на русском — 19. Сколько школьников присутствовало и на математике, и на физике (не имеет значения, удостоили ли они своим посещением урок русского языка)?

01

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11) Для нумерации всех парковочных мест на стоянке (поряд от первого до последнего) рядом с каждым местом был установлен его номер, составленный из табличек, на каждой из которых написано по одной цифре. В общей сложности было использовано 2148 табличек. Сколько мест на парковке? Каких цифр было использовано больше всего, а каких — меньше всего?

52 места. Больше всего использовано 1 и 2 (порядку). Меньше всего 0, 8, 9 (порядку)

22. («Ломоносов», 2012, 10–11) В группу, состоящую из 19 детей, присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 5 пряников и 9 конфет, а второго — 4 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?

Нет

23. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Пятая часть персонала фирмы работает в транспортном отделе, ещё 52 сотрудника — в отделе продаж, остальные — в нескольких цехах, в каждом из которых работает  $1/7$  персонала фирмы. Чему равна общая численность персонала?

141

24. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Лаборатория Альфа на покупку пяти микроскопов, четырёх телескопов и эпидиаскопа потратила 140 тыс. руб. Лаборатория Бета на покупку шести микроскопов, пяти телескопов и эпидиаскопа потратила 167 тыс. руб. Сколько потратит лаборатория Гамма на покупку трёх микроскопов, двух телескопов и эпидиаскопа, если известно, что цены у всех поставщиков одинаковы?

86 тыс. руб.

25. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11) Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого её членов меньше 4. Найдите первый член этой прогрессии.

3

26. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) Петя и Вася выходят одновременно из пункта  $A$  и идут в пункт  $B$ : Петя по шоссе, а Вася по тропинке. Найти расстояние между  $A$  и  $B$  по шоссе, если путь по тропинке короче пути по шоссе на 5 км, скорость движения Васи 3 км/ч, а скорость Пети — натуральное число и он приходит в  $B$  на один час позже Васи.

км 8

27. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) Две бригады рабочих выполнили одинаковую работу. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на пять человек больше, то она могла бы закончить работу на два часа раньше. Найдите число рабочих в бригадах, если производительности всех рабочих одинаковы.

25 и 24

28. («Курчатов», 2015, 11) Ученику дано число  $x$ : это обыкновенная дробь со знаменателем 9. Ученик вычислил три новых числа  $2x$ ,  $4x$  и  $5x$ , каждое из этих трёх чисел округлил до ближайшего целого и результаты округлений сложил. Получилось 120. Найдите  $x$ . (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше  $1/2$ , и в большую, если дробная часть больше либо равна  $1/2$ .)

$\frac{6}{86}$

29. (ОММО, 2014) Скуперфильд хочет выплатить наложенный на него штраф в 1000 фертингов монетами в 7 и 13 фертингов. Каким наименьшим количеством монет он может обойтись?

87

**30.** («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Туристический автобус, вмещающий не более 50 человек, привёз группу школьников после экскурсии в кафе. Школьники расселись в кафе так, что за несколькими столами оказалось по три девочки и одному мальчику, за другими несколькими столами — по два мальчика и одной девочке, и ещё за одним столом оказались одна девочка и один мальчик. Какое максимальное количество школьников могло быть на экскурсии, если известно, что девочек в группе в полтора раза больше, чем мальчиков?

45

**31.** («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Два мальчика в течение нескольких часов ходили кругами вокруг здания, оба по часовой стрелке, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проходил один круг за 5 минут, более медленный — за некоторое целое число минут. При этом время между встречами тоже равнялось некоторому целому числу минут, причём оно было не меньше 12. За какое время более медленный мальчик проходил полный круг?

За 6 минут

**32.** (ОММО, 2013) Ученикам 11 «Б» класса на выбор предложили пройти тестирование ровно по одному из предметов: биологии, математике или химии. Двое ребят приняли участие в тестировании по биологии; более трети, но менее 40% учеников проходили тестирование по химии и ровно половина — по математике. Сколько ребят участвовало в тестировании по химии, если в классе присутствовали более 16 учеников?

33

**33.** (ОММО, 2011) Одна тетрадь, 3 блокнота и 2 ручки стоят 98 рублей, а 3 тетради и блокнот — на 36 рублей дешевле 5 ручек. Сколько стоит каждый из предметов, если тетрадь стоит чётное число рублей? (Каждый из этих предметов стоит целое число рублей.)

4, 22, 14

**34.** (ОММО, 2010) В диване живут клопы и блохи. Боря лежит на диване и рассуждает: если клопов станет в несколько раз больше, то всего насекомых будет 2012, а если блох станет во столько же раз больше, а число клопов не изменится, то всего насекомых будет 2011. Сколько же насекомых живет в диване сейчас?

1341

**35.** (ОММО, 2013) В автомобильном пробеге Москва—Удоев—Москва участвовали несколько (одинаковых по численности) делегаций автолюбителей. Некоторые из этих делегаций заняли все места в 3-местных «Паккардах» и одном 4-местном «Лорен-Дитрихе», а остальные делегации предпочли занять все места в 5-местных «Студебеккерах» и одном 2-местном «Фиате». Сколько автолюбителей было в делегации, если «Студебеккер» в пробеге оказалось на 5 больше, чем «Паккардов»?

(1 или) 19

**36.** («Ломоносов», 2014, 10–11) Шариковая ручка стоит 10 рублей, гелевая — 40 рублей, а перьевая — 60 рублей. Какое наибольшее количество шариковых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 15 ручек и среди них должны быть ручки всех трёх типов, а истратить на них нужно ровно 500 рублей?

9

37. («Ломоносов», 2014, 10–11) Команда спортсменов, третья часть которых — сноубордисты, спустилась с горы. При этом некоторые из них сели в вагон фуникулёра, вмещающий не более 11 человек, а все остальные спустились самостоятельно, причём их число оказалось больше 40%, но меньше 44% от общего количества. Определите количество сноубордистов (если оно определяется из условия задачи неоднозначно, то впишите в ответ сумму всех возможных его значений).

4

38. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11) Для детского сада закупили наборы конфет трёх разных типов, потратив 2200 рублей. Первый набор стоит 50 рублей и содержит 25 конфет. Второй набор стоит 180 рублей и содержит 95 конфет, третий набор стоит 150 рублей и содержит 80 конфет. Сколько каких наборов купили, если общее количество конфет в них максимально?

Первый набор — 25 конфет, второй набор — 95 конфет, третий набор — 80 конфет

39. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Три сестры пришли на рынок и продавали поштучно цыплят. Первая принесла 14 цыплят, вторая — 24, третья — 38 цыплят. Каждая из них часть товара продала утром, а часть — вечером. Утренняя цена одного цыплёнка была у всех сестёр одинаковая, и вечерняя цена тоже одинаковая, но более низкая (положительная). К вечеру весь товар был распродан, и дневная выручка (за утро и вечер) у всех сестёр оказалась одинаковой: 1200 руб. Найдите суммарную утреннюю выручку (в рублях) всех сестёр.

0861

40. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) При каких значениях  $x$  число

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{3-x}$$

является целым?

$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{3-x} \in \mathbb{Z}$

41. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Для перевозки 60 тонн песка автомобилю потребовалось сделать некоторое количество рейсов, а для перевозки 120 тонн песка оказалось необходимо на 5 рейсов больше. На всех рейсах, кроме, может быть, последнего в каждой из этих двух перевозок, автомобиль загружается полностью. Определите все возможные значения грузоподъёмности этого автомобиля (то есть наибольшей массы груза, которую автомобиль может перевезти за один раз).

ннот  $\left( \frac{3}{40}; \frac{11}{071} \right]$