Раскраски

1. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) Можно ли раскрасить грани куба в три цвета так, чтобы каждый цвет присутствовал, но нельзя было увидеть одновременно грани всех трёх цветов, откуда бы мы ни взглянули на куб? (Одновременно можно увидеть только три любые грани, имеющие общую вершину.)

Да

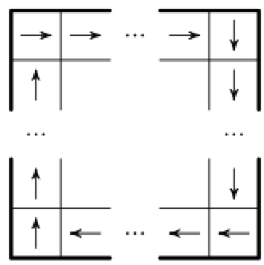
2. (*Всеросс., 2016, МЭ, 11*) Каждая клетка таблицы размером 7×8 (7 строк и 8 столбцов) покрашена в один из трёх цветов: красный, жёлтый или зелёный. При этом в каждой строке красных клеток не меньше, чем жёлтых и не меньше, чем зелёных, а в каждом столбце жёлтых клеток не меньше, чем красных и не меньше, чем зелёных. Сколько зелёных клеток может быть в такой таблице?

8

3. (*Олимпиада им. Эйлера, 2014, РЭ*) На окружности отметили 2013 точек и каждую соединили с двумя соседними. Также отметили центр окружности и соединили его со всеми остальными отмеченными точками. Можно ли покрасить 1007 отмеченных точек в красный, а остальные 1007 — в синий цвет так, чтобы каждая красная точка была соединена с нечётным числом синих, а каждая синяя — с чётным числом синих?

Нет

4. (*ММО, 2010, 8.6*) В некоторых клетках квадрата 20×20 стоит стрелочка в одном из четырёх направлений. На границе квадрата все стрелочки смотрят вдоль границы по часовой стрелке (см. рис.). Кроме того, стрелочки в соседних (возможно, по диагонали) клетках не смотрят в противоположных направлениях. Докажите, что найдётся клетка, в которой стрелочки нет.



5. (*Всеросс., 2016, РЭ, 9*) В белой таблице 2016×2016 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k *удачным*, если $k \leqslant 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k, расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными?

1008

ЯГУБОВ.РФ

6. (*Всеросс., 2014, РЭ, 9*) Все клетки квадратной таблицы 100×100 пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Петя закрашивает клетки по следующим правилам. Вначале он закрашивает k клеток по своему усмотрению. Далее каждым ходом Петя может закрасить одну ещё не закрашенную клетку с номером a, если для неё выполнено хотя бы одно из двух условий: либо в одной строке с ней есть уже закрашенная клетка с номером меньшим, чем a; либо в одном столбце с ней есть уже закрашенная клетка с номером большим, чем a. При каком наименьшем k независимо от исходной нумерации Петя за несколько ходов сможет закрасить все клетки таблицы?

$\boxed{k = 1}$

7. (*ММО, 2017, 9.5*) Петя раскрасил каждую клетку квадрата 1000×1000 в один из 10 цветов. Также он придумал такой 10-клеточный многоугольник Ф, что при любом способе вырезать из этого квадрата по границам клеток многоугольник, равный Ф, в нём все 10 клеток оказываются разного цвета. Обязательно ли Ф — прямоугольник?

8. (*Всеросс., 2015, финал, 9*) Поле представляет собой клетчатый квадрат 41×41, в одной из клеток которого замаскирован танк. Истребитель за один выстрел обстреливает одну клетку. Если произошло попадание, танк переползает на соседнюю по стороне клетку поля, если нет — остаётся на месте. При этом после выстрела пилот истребителя не знает, произошло ли попадание. Для уничтожения танка надо попасть в него два раза. Каким наименьшим числом выстрелов можно обойтись для того, чтобы гарантировать, что танк уничтожен?

$\boxed{\frac{3\cdot41^2-1}{2} = 2521}$

9. (*Всеросс., 2017, финал, 9.8, 10.7*) Каждая клетка доски 100×100 окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата 2×2. Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке.

10. (*ММО, 2016, 10.2*) Все натуральные числа, бо́льшие единицы, раскрасили в два цвета — синий и красный — так, что сумма любых двух синих (в том числе одинаковых) — синяя, а произведение любых двух красных (в том числе одинаковых) — красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2017?

11. (*ММО, 2016, 10.4*) Бесконечную клетчатую доску раскрасили шахматным образом, и в каждую белую клетку вписали по отличному от нуля целому числу. После этого для каждой чёрной клетки посчитали разность: произведение того, что написано в соседних по горизонтали клетках, минус произведение того, что написано в соседних по вертикали. Могут ли все такие разности равняться 1?

$\boxed{\text{Да}}$

12. (*Всеросс., 2016, РЭ, 10*) Дана клетчатая таблица 100×100, клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток?

$\boxed{14751}$

ЯГУБОВ.РФ

13. (*Всеросс., 2015, РЭ, 10*) Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

$\boxed{k = 2n}$

14. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11*) Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2. Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит ладью в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую ладью на какую-то клетку, либо переставить ладью из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a. Каждый раз, когда ладья попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить ладью на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество ладей потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

$\boxed{n}$

15. (*Всеросс., 2015, финал, 11*) Дано натуральное число $N \geqslant 3$. Назовём набор из N точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из N точек можно разделить многочленом степени не более k?

$\boxed{k = N - 2}$

16. (*Всеросс., 2017, финал, 11.6*) В некоторых клетках квадрата 200×200 стоит по одной фишке — красной или синей; остальные клетки пусты. Одна фишка *видит* другую, если они находятся в одной строке или одном столбце. Известно, что каждая фишка видит ровно пять фишек другого цвета (и, возможно, некоторое количество фишек своего цвета). Найдите наибольшее возможное количество фишек, стоящих в клетках.

Ягубов.РФ