

## Эйлеровы графы

*Эйлеров цикл* — это цикл, проходящий по каждому ребру (мульти)графа ровно один раз. Подчеркнём, что, говоря здесь о графах, мы имеем в виду и мультиграфы тоже (разрешены кратные рёбра, но не петли и ориентация); ведь исходная задача о кёнигсбергских мостах была сформулирована именно для мультиграфа. *Эйлеров граф* — это граф, в котором существует эйлеров цикл.

1. Граф с вершиной нечётной степени не может быть эйлеровым. Объясните, почему.
2. В связном графе степень каждой вершины чётна. Докажите, что множество рёбер графа распадается в дизъюнктное объединение простых циклов (т. е. попарно не пересекающихся по рёбрам; общие вершины у этих циклов могут быть).

Фиксируем вершину, для неё по рёбрам, находящимся в цикле, удаляем его рёбра...

3. Докажите, что если множество рёбер связного графа распадается в дизъюнктное объединение простых циклов, то граф является эйлеровым.

Индукция по числу простых циклов

Из задач 1–3 следует важная характеристика эйлеровых графов. Именно, для связного графа  $G$  следующие утверждения эквивалентны:

- $G$  — эйлеров;
- степень каждой вершины  $G$  чётна;
- множество рёбер  $G$  распадается в дизъюнктное объединение простых циклов.

4. При каких  $n$  граф  $K_n$  является эйлеровым?

При чётных  $n \geq 2$

5. При каких  $m, n$  граф  $K_{m,n}$  является эйлеровым?

При чётных  $m, n \geq 2$

6. В графе  $G$  все вершины имеют чётную степень. Докажите, что рёбра  $G$  можно ориентировать так, чтобы для каждой вершины число входящих в неё рёбер равнялось числу выходящих.