Перебор вариантов

Основной вопрос комбинаторики — «сколько?», основная задача — подсчёт числа элементов конечного множества. В комбинаторных задачах нас обычно интересует, сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданного конечного набора объектов.

В простейших случаях мы можем выписать все нужные нам комбинации и непосредственно подсчитать их. Однако при бессистемном выписывании легко упустить какую-то комбинацию или, наоборот, посчитать некоторую комбинацию дважды. Поэтому при переборе вариантов желательно придерживаться двух правил.

1. Обозначаем наши комбинации буквами или цифрами так, что каждая комбинация будет обозначена своей уникальной последовательностью букв или цифр.

2. Выписываем комбинации в алфавитном порядке (при обозначении буквами) или по возрастанию чисел (при обозначении цифрами).

При таком переборе ни один вариант не ускользнёт от нас и, с другой стороны, будет исключена возможность повторения вариантов.

Задача. Маша собирается съесть яблоко, сливу и мандарин, но пока не решила, в какой последовательности. Сколькими способами Маша может выбрать эту последовательность?

Решение. Обозначаем буквами: Я — яблоко, С — слива, М — мандарин. Тогда, например, СМЯ — это вариант, когда Маша сначала съест сливу, потом — мандарин, потом — яблоко. Выпишем варианты в алфавитном порядке:

МСЯ, МЯС, СМЯ, СЯМ, ЯМС, ЯСМ.

Получилось 6 вариантов.

Задача. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумма цифр которых меньше 4?

Решение. Здесь обозначать нечего — мы и так имеем дело с числами. Остаётся лишь выписать по возрастанию все четырёхзначные числа, сумма цифр которых равна 1, 2 или 3:

$$1000,\ 1001,\ 1002,\ 1010,\ 1011,\ 1020,\ 1100,\ 1101,\ 1110,\ 1200,\ 2000,\ 2001,\ 2010,\ 2100,\ 3000.$$

Всего получилось 15 чисел.

Задача. (*Леонард Эйлер*) Четыре гостя при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Невнимательный швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получил чужую шляпу?

Решение. Занумеруем гостей цифрами 1, 2, 3, 4 и так же занумеруем их шляпы. Считаем, что шляпа с данным номером принадлежит гостю с этим же номером (то есть, например, шляпа 2 принадлежит гостю 2).

Тогда каждый вариант получения шляп обозначается четырёхзначным числом, составленным из цифр 1, 2, 3 и 4, в котором *номер позиции* цифры есть номер гостя, а *сама цифра* есть номер полученной им шляпы (номера позиций будем считать слева направо).

Например, комбинация 4132 означает, что первый гость получил четвёртую шляпу, второй — первую, третий — третью, а четвёртый — вторую. Такой вариант не годится по условию, поскольку третий получил свою шляпу.

Теперь понятно, что нужно сделать — выписать по возрастанию все четырёхначные числа, содержащие по одной цифре 1, 2, 3 и 4, такие, что никакая цифра не стоит на позиции со своим номером. Эти числа выписаны ниже под чертой. Красные цифры над чертой — номер позиции (номер гостя), с которым не должна совпадать цифра в соответствующем столбце (номер шляпы).

1	2	3	4
2	1	4	3
2	3	4	1
2	4	1	3
3	1	4	2
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	3	1	2
4	3	2	1

Как видим, всего имеется 9 вариантов нужной раздачи шляп.

Вариантов может быть довольно много, но в некоторых случаях, тем не менее, самый быстрый способ решения задачи — разумно организованный перебор.

Задача. (*«Высшая проба», 2013, 8*) Сколько одночленов окажется в многочлене

$$(1+t^3+t^6+\ldots+t^{30})(1+t^5+t^{10}+\ldots+t^{30})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов?

Решение. Раскроем скобки и (не приводя подобные члены) выпишем в таблицу все получающиеся степени одночленов. Первая строка таблицы — это степени, получающиеся при умножении первого многочлена-сомножителя на первое слагаемое второго многочлена (равное 1); вторая строка — это степени, получающиеся при умножении первого многочлена на второе слагаемое второго многочлена (равное t^5), и т. д.

0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35
10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40
15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50
25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60

Всего в таблице 77 чисел, из них 24 входят в таблицу более одного раза (блоки повторяющихся чисел обведены рамкой). Следовательно, после приведения подобных членов получится $77-24=53$ одночлена.

В некоторых ситуациях не представляется возможным непосредственно выписать все варианты, но тем не менее очевидно, сколько их на самом деле.

Задача. (*«Физтех», 2013, 8*) Сколько пар натуральных чисел удовлетворяет равенству

$$2x + 5y = 90000\,?$$

Решение. Переписав данное равенство в виде $2x = 90000 - 5y$, мы видим, что правая часть делится на 5. Тогда $2x$ делится на 5, а значит, и x делится на 5; то есть $x = 5n$ для некоторого натурального n. Аналогично заключаем, что $y = 2k$ для некоторого натурального k.

Теперь исходное равенство принимает вид: $10n + 10k = 90000$, то есть $n + k = 9000$. Спрашивается: сколько пар (n, k) удовлетворяют полученному равенству?

Понятно, что n может принимать значения от 1 до 8999. Число k однозначно определяется выбором n (поскольку $k = 9000 - n$). Следовательно, имеется 8999 пар чисел (n, k).

Но число x однозначно определяется по n, а число y однозначно определяется по x (или по k). Значит, искомое количество пар (x, y) также равно 8999.

Задачи

1. (*«Физтех», 2016, 5–7*) Сколько целых чисел от 378 до 2433 имеют сумму цифр, делящуюся на 5?

$\boxed{411}$

2. (*«Физтех», 2016, 8–9*) Сколько существует пар натуральных чисел $x > y$ таких, что их произведение на 19999 больше их суммы?

$\boxed{15}$

3. (*«Ломоносов», 2014, 8*) Найдите количество пар целых чисел (m, n), для которых выполнено равенство

$$n^2 + 2^{2014} = m^2.$$

$\boxed{4026}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–9*) Назовем число *замечательным*, если оно имеет ровно 4 различных натуральных делителя, причем среди них найдутся два таких, что ни один не кратен другому. Сколько существует замечательных двузначных чисел?

$\boxed{36}$

5. (*«Физтех», 2016, 9*) Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты x, y и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{4} + 9x + 19$.

$\boxed{18}$

6. (*«Высшая проба», 2013, 9–10*) На шахматной доске 7×7 посчитайте количество всех квадратов, границы которых проходят по границам клеток.

$\boxed{140}$

7. (*«Высшая проба», 2014, 11*) Найдите количество натуральных чисел $n \leqslant 10^{12}$ таких, что $\text{НОК}(16, n) = 16n$.

$\boxed{5 \cdot 10^{11}}$

8. (*Математический праздник, 1997, 7*) Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)

$\boxed{\text{Поровну}}$

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8*) Найдите количество натуральных чисел от 1 до 100, имеющих ровно четыре натуральных делителя, не менее чем три из которых не превосходят 10.

$\boxed{8}$

10. (*«Высшая проба», 2014, 9*) Из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ выбираются три различных натуральных числа a, b, c. Сколько существует способов сделать это так, чтобы число $a^{(b^c)}$ делилось на 4?

$\boxed{10}$

11. (*«Высшая проба», 2013, 9*) Сколько одночленов окажется в многочлене

$$(1 + t^4 + t^8 + \ldots + t^{40})(1 + t^5 + t^{10} + \ldots + t^{40})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов?

$\boxed{69}$

12. (*«Высшая проба», 2011, 9*) На клетчатой бумаге нарисован квадрат размером 3×3 клеточки. Требуется закрасить в этом квадрате три клеточки так, чтобы никакие две закрашенные клеточки не имели общей стороны. Сколькими способами это можно сделать? Два способа раскраски считаются одинаковыми, если один можно получить из другого поворотом квадрата.

$\boxed{6}$

13. (*«Высшая проба», 2013, 9*) В стране четыре города: А, Б, В и Г. Их хотят связать тремя авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

$\boxed{16}$

14. (*«Высшая проба», 2014, 9, 11*) Сколькими способами цифры от 1 до 9 можно разбить на несколько (больше одной) групп так, чтобы суммы цифр во всех группах были равны друг другу? (Разбиения, отличающиеся только перестановкой групп, считаются одинаковыми.)

$\boxed{10}$

15. (*Турнир Ломоносова, 1991*) Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Сколько неправильных шеренг можно построить

а) из четырёх;

б) из пяти

солдат разного роста?

$\boxed{\text{а) 10; б) 32}}$

16. (*ОММО, 2014*) Скуперфильд хочет выплатить наложенный на него штраф в 1000 фертингов монетами в 7 и 13 фертингов. Сколькими способами он может это сделать?[1] Каким наименьшим количеством монет он может обойтись?

11 способов; минимум 82 монеты

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 8–9*) Сколькими способами можно поставить цифры от 1 до 9 вместо букв так, чтобы все неравенства выполнялись?

$$\begin{array}{ccccc} a & > & b & > & c \\ \vee & & \vee & & \vee \\ d & > & e & > & f \\ \vee & & \vee & & \vee \\ g & > & h & > & i \end{array}$$

42

18. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 9*) Сколькими способами можно выписать в ряд числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы для любых трёх подряд идущих чисел a, b, c величина $ac - b^2$ была кратна 7?

12

19. (*«Высшая проба», 2013, 8*) Сколько существует различных (т. е. не равных друг другу) остроугольных треугольников с целыми длинами сторон и периметром 24? Выпишите длины трёх сторон всех этих треугольников и докажите, что других не бывает.

6

20. (*«Высшая проба», 2013, 10*) Сколько существует различных (т. е. не равных друг другу) остроугольных треугольников с целыми длинами сторон и периметром 33? Обоснуйте свой ответ.

16

21. (*«Ломоносов», 2016, 7–9*) Сколькими различными способами можно разменять 1000 рублей, используя только рублёвые, 5-рублёвые и 10-рублёвые монеты?

10201

22. (*«Физтех», 2015, 10–11*) Сколькими способами можно разменять 120 000 рублей монетами в 1, 2 и 5 рублей?

720048001

23. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11*) В кошельке у купца Ганса лежат 20 серебряных монет по 2 кроны, 15 серебряных монет по 3 кроны и 3 золотых дуката (1 дукат равен 5 крон). Сколькими способами Ганс может уплатить сумму в 10 дукатов? Монеты одного достоинства неразличимы.

26

[1] На олимпиаде этого вопроса не было.