

Формула включений и исключений

Содержание

1	Переход к дополнению	1
2	Формула включений и исключений	2
3	Задача о беспорядках	5
4	Функция Эйлера	7
5	Числа Стирлинга второго рода	7
6	Задачи	9

Не всякая задача комбинаторики решается непосредственным применением основных комбинаторных принципов — правила суммы или произведения, подсчётом числа размещений или сочетаний. В некоторых случаях приходится идти окольным путем и действовать своеобразным «методом решета», который состоит в следующем: для нахождения числа элементов интересующего нас множества мы сначала находим число элементов некоторого большего множества, а потом «просеиваем» нужные элементы, постепенно отбрасывая лишние.

1 Переход к дополнению

Простейшим примером «метода решета» является переход к дополнению: число «хороших» элементов равно общему числу элементов минус число «плохих» элементов.

ЗАДАЧА. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 7?

РЕШЕНИЕ. Найдём сначала, сколько всего имеется четырёхзначных чисел. Первую цифру мы можем выбрать девятью способами, каждую из остальных цифр — десятью. Стало быть, количество четырёхзначных чисел равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Теперь найдём, сколько четырёхзначных чисел не содержат ни одной семёрки. Для выбора первой цифры имеется 8 способов, для выбора каждой из остальных цифр — 9 способов. Следовательно, всего будет $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ четырёхзначных чисел, в записи которых нет ни одной цифры 7.

Ну а чисел, в которых хотя бы одна семёрка имеется, будет $9000 - 5832 = 3168$.

Здесь мы действовали по схеме, которую, выражаясь неформально, можно описать так: «*хотя бы один*» равно общему числу минус «*ни одного*». В других ситуациях можно действовать наоборот: «*ни одного*» равно общему числу минус «*хотя бы один*».

ЗАДАЧА. Дан выпуклый n -угольник ($n \geq 5$). Сколькими способами можно выбрать в нём две непересекающиеся диагонали? Порядок выбора не важен.

РЕШЕНИЕ. Идея подсчёта такова: искомое число пар непересекающихся диагоналей равно общему числу пар диагоналей минус число пар пересекающихся (внутри n -угольника) диагоналей минус число пар смежных (выходящих из одной вершины) диагоналей.

Из каждой вершины n -угольника исходят $n - 3$ диагонали, поэтому всего диагоналей имеется $n(n - 3)/2$. Значит, число неупорядоченных пар диагоналей равно:

$$N_0 = C_{n(n-3)/2}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-3)}{2} \left(\frac{n(n-3)}{2} - 1 \right) = \frac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{8}.$$

Теперь найдём число пар пересекающихся диагоналей. Каждой такой паре отвечает четвёрка вершин n -угольника — концов этих диагоналей. Наоборот, каждым четырёх вершинам n -угольника соответствует единственная пара пересекающихся диагоналей. Поэтому число пар пересекающихся диагоналей есть число неупорядоченных четвёрок вершин n -угольника:

$$N_1 = C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Осталось найти число N_2 пар смежных диагоналей. Из каждой вершины выходят C_{n-3}^2 пар диагоналей, поэтому

$$N_2 = nC_{n-3}^2 = \frac{n(n-3)(n-4)}{2}.$$

Искомое число пар непересекающихся диагоналей: $N = N_0 - N_1 - N_2$, и после несложных преобразований получим:

$$N = \frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}.$$

Бывает так, что в условии задачи ничто не намекает на «*хотя бы один*» или «*ни одного*», и тем не менее задача проще всего решается переходом к дополнению.

ЗАДАЧА. («Высшая проба», 2013, 10) В стране пять городов: А, Б, В, Г и Д. Их хотят связать четырьмя авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

РЕШЕНИЕ. Найдём сначала общее количество соединений пяти городов четырьмя авиалиниями. Всего пар городов имеется $C_5^2 = 10$. Из них нужно выбрать четыре пары для соединения. Это можно сделать $C_{10}^4 = 210$ способами.

Теперь ищем количество *плохих* соединений (когда найдутся два города таких, что из одного никак нельзя долететь до другого). Плохие соединения могут быть двух видов: 1) есть изолированный город (из которого не выходит ни одна авиалиния); 2) нет изолированного города (то есть из каждого города выходит авиалиния).

Пусть изолированный город есть (его можно выбрать 5 способами). Тогда четыре авиалинии проложены (как угодно) между четырьмя остальными городами. Из $C_4^2 = 6$ пар городов мы выбираем 4 пары для соединения; это можно сделать $C_6^4 = 15$ способами. Следовательно, плохих соединений с изолированным городом получается $5 \cdot 15 = 75$.

Теперь предположим, что в плохом соединении изолированного города нет. Выясним, как устроено такое соединение. Допустим, что из города А нельзя попасть в город Д. Пусть А соединён линией с Б, а Д соединён линией с Г. Имеются лишь две возможности провести оставшиеся линии: достроить треугольник АБВ (он не будет связан с отрезком ГД) или достроить треугольник ВГД (он не будет связан с отрезком АБ).

Итак, плохое соединение без изолированного города — это треугольник плюс не связанный с ним отрезок, и таких соединений столько же, сколько существует способов соединить два города отрезком (тогда оставшиеся три города автоматически замкнутся треугольником). Таким образом, нужно просто выбрать два города из пяти; для этого имеется $C_5^2 = 10$ способов.

Всего плохих соединений получается $75 + 10 = 85$. Следовательно, искомое число соединений равно $210 - 85 = 125$.

2 Формула включений и исключений

Действуя по схеме «*ни одного*» равно общему числу минус «*хотя бы один*», мы должны уметь вычислять «*хотя бы один*», то есть находить число объектов, обладающих хотя бы одним из указанных свойств. С теоретико-множественной точки зрения речь идёт о нахождении числа

элементов в объединении нескольких множеств. В такой ситуации часто приходит на помощь формула включений и исключений.

В качестве элементарного примера рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА. Каждый ученик класса побывал в театре или в кино. В театр ходили 22 человека. В кино были 15 человек. И в театре, и в кино были 7 человек. Сколько учеников в классе?

РЕШЕНИЕ. Если мы найдём сумму $22 + 15$, то окажется, что каждого, кто побывал и в театре, и в кино, мы посчитали дважды (например, если Вася ходил и в театр, и в кино, то один раз он вошёл в эту сумму в числе 22 «театралов», а второй раз — в числе 15 «киношников»). Поэтому найденная сумма на 7 больше количества учеников в классе. Следовательно, в классе $22 + 15 - 7 = 30$ человек.

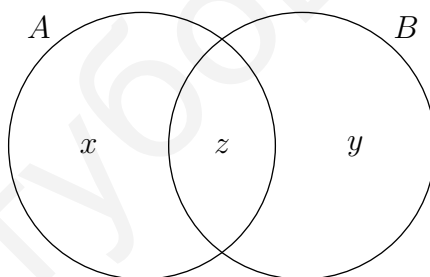
Число элементов конечного множества A называется *мощностью* этого множества и обозначается $|A|$. Формула включений и исключений даёт возможность находить мощность объединения любого конечного набора множеств.

Формула включений и исключений для двух множеств. Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (1)$$

Доказательство формулы (1) почти дословно повторяет решение последней задачи: суммируя мощности множеств A и B , мы дважды учитываем каждый элемент в их пересечении (один раз — со стороны множества A , второй раз — со стороны множества B). Поэтому мощность пересечения надо вычесть.

Можно также доказать формулу (1) с помощью следующего наглядного рисунка.



Пусть x — число элементов множества A , не входящих в B ; y — число элементов B , не входящих в A ; z — число элементов в пересечении A и B . Тогда $x + z = |A|$, $y + z = |B|$, и мы имеем:

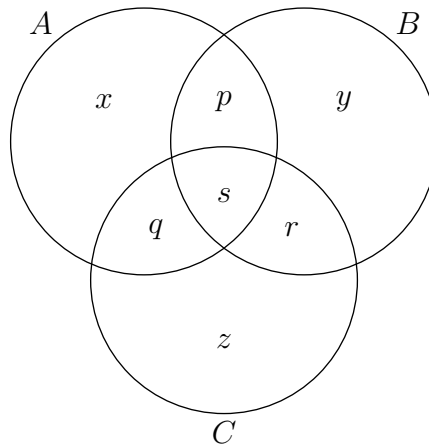
$$|A \cup B| = x + y + z = (x + z) + (y + z) - z = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Формула включений и исключений для трёх множеств. Для любых конечных множеств A , B и C справедливо равенство

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (2)$$

Почему так получается? Назовём *двукратными* элементы, входящие в пересечение ровно двух множеств, и *трёхкратными* — элементы, входящие в пересечение трёх множеств. Сложив мощности A , B и C , мы дважды учли каждый двукратный элемент и трижды — каждый трёхкратный. Вычтя три попарных пересечения, мы «восстановили справедливость» в отношении двукратных элементов, но теперь оказались полностью неучтёнными трёхкратные элементы. Поэтому надо добавить мощность тройного пересечения.

Приведём также доказательство формулы (2) с помощью следующего рисунка.



Здесь x, y, z — количества однократных элементов (входящих лишь в одно из данных множеств); p, q, r — количества двукратных элементов; s — число трёхкратных элементов. Имеем:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= x + y + z + p + q + r + s = \\ &= (x + p + q + s) + (y + p + r + s) + (z + q + r + s) - (p + s) - (q + s) - (r + s) + s = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА. В группе 40 туристов. Из них 20 человек говорят по-английски, 15 — по-французски, 11 — по-испански. Английский и французский знают семь человек, английский и испанский — пятеро, французский и испанский — трое. Два туриста говорят на всех трёх языках. Сколько человек группы не знают ни одного из этих языков?

РЕШЕНИЕ. Пусть A — множество туристов группы, знающих английский, F — французский, I — испанский. Тогда $|A| = 20$, $|F| = 15$, $|I| = 11$, $|A \cap F| = 7$, $|A \cap I| = 5$, $|F \cap I| = 3$, $|A \cap F \cap I| = 2$. Сколько человек говорят *хотя бы на одном* из этих языков? По формуле включений и исключений для трёх множеств имеем:

$$\begin{aligned} |A \cup F \cup I| &= |A| + |F| + |I| - |A \cap F| - |A \cap I| - |F \cap I| + |A \cap F \cap I| = \\ &= 20 + 15 + 11 - 7 - 5 - 3 + 2 = 33. \end{aligned}$$

Значит, ни одного из данных языков не знают $40 - 33 = 7$ человек.

Теперь мы готовы привести формулу включений и исключений для любого конечного числа множеств, которая обобщает формулы (1) и (2).

Формула включений и исключений. Для любых конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ &\quad - \sum_{i < j < k < l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \quad (3) \end{aligned}$$

Выглядит формула (3) громоздко, но суть её проста: сначала суммируем мощности всех множеств (n слагаемых), затем вычитаем мощности всех попарных пересечений (C_n^2 слагаемых), затем прибавляем мощности всех тройных пересечений (C_n^3 слагаемых) и так далее, чередуя знаки, до последнего слагаемого — мощности пересечения всех n множеств.

Для доказательства формулы (3) нам понадобится вспомогательное тождество.

ЛЕММА. Для любого натурального m справедливо равенство

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m+1} C_m^m = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$0 = (1 - 1)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \cdot 1^{m-k} \cdot (-1)^k = 1 + \sum_{k=1}^m (-1)^k C_m^k = 1 - \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} C_m^k,$$

откуда

$$1 = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} C_m^k = C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m+1} C_m^m.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ. Возьмём произвольный элемент $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Покажем, что x учитывается правой частью формулы (3) в точности один раз.

Предположим, что x принадлежит пересечению ровно m наших множеств; не ограничивая общности, можно считать, что x принадлежит множествам $A_1, \dots, A_m$ и не принадлежит множествам $A_{m+1}, \dots, A_n$. Тогда:

- в первой сумме $\sum_i |A_i|$ элемент x посчитан $m = C_m^1$ раз (в слагаемых $|A_1|, \dots, |A_m|$);
- во второй сумме $\sum_{i < j} |A_i \cap A_j|$ элемент x посчитан C_m^2 раз (ведь количество попарных пересечений $A_i \cap A_j$, для которых $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, равно C_m^2);
- в третьей сумме $\sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ элемент x посчитан C_m^3 раз (ведь количество пересечений $A_i \cap A_j \cap A_k$, для которых $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, равно C_m^3);
- ...
- в m -й сумме $\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}|$ элемент x посчитан $1 = C_m^m$ раз (он войдёт только в слагаемое $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$);
- суммы, содержащие $m + 1$ и более пересечений, не учитывают элемент x , поскольку x не входит в пересечение более чем m множеств.

Таким образом, элемент x оказывается посчитанным $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m+1} C_m^m$ раз. Согласно лемме это выражение равно единице, что и требовалось. Формула (3) тем самым доказана.

Перейдём к рассмотрению задач, которые можно решить с помощью формулы включений и исключений.

3 Задача о беспорядках

В листке «[Перебор вариантов](#)» мы привели частный случай задачи о шляпах (для четырёх гостей) и решили её непосредственным перебором. Теперь рассмотрим данную задачу в общем виде.

ЗАДАЧА. (Леонард Эйлер) Войдя в ресторан, n гостей оставили швейцару свои шляпы, а на выходе получили их обратно. Швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получит чужую шляпу?

РЕШЕНИЕ. Занумеруем гостей числами $1, 2, \dots, n$ и так же занумеруем шляпы (при этом i -я шляпа принадлежит i -му гостю). Тогда любая перестановка $k_1 k_2 \dots k_n$ чисел $1, 2, \dots, n$ обозначает вариант разбора шляп, при котором i -й гость получил k_i -ю шляпу. Например, в случае четырёх человек перестановка 4132 означает, что первый получил четвертую шляпу ($k_1 = 4$), второй — первую ($k_2 = 1$), третий — третью (свою, $k_3 = 3$) и четвертый — вторую ($k_4 = 2$). Наоборот, каждый вариант разбора шляп обозначается единственной перестановкой чисел $1, 2, \dots, n$.

Будем говорить, что в перестановке $k_1 k_2 \dots k_n$ чисел $1, 2, \dots, n$ число i стоит на своём месте, если $k_i = i$ (например, в перестановке 4132 тройка стоит на своём месте). Нас интересует количество *беспорядков*, то есть таких перестановок, в которых ни одно из чисел не стоит на своём месте. Число беспорядков можно найти, вычитая из общего количества перестановок, равного $n!$, количество тех перестановок, в которых хотя бы одно из чисел стоит на своём месте.

Пусть A_i — множество перестановок, в которых число i стоит на своём месте ($i = 1, 2, \dots, n$). Искомое число N беспорядков, таким образом, равно

$$\begin{aligned} N &= n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \\ &= n! - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Ясно, что $|A_i| = (n-1)!$, поэтому

$$\sum_i |A_i| = n \cdot (n-1)! = n!.$$

Точно так же $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ и

$$\sum_{i < j} |A_i \cap A_j| = C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n(n-1)}{2!} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}.$$

Аналогично $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$ и

$$\sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!}.$$

Теперь мы приходим к нужной формуле:

$$N = n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

При $n = 4$ найденная формула даёт:

$$N = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!} = 12 - 4 + 1 = 9.$$

Этот результат мы получили ранее прямым перебором.

Заметим, что если шляпы разбираются случайным образом, то вероятность беспорядка оказывается равной:

$$\frac{N}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

При $n \rightarrow \infty$ данная сумма стремится к пределу, равному $1/e$, где $e = 2,718\dots$ — одна из самых распространённых математических констант (наряду с числом π), получившая обозначение также в честь Эйлера. Таким образом, если гостей много, то вероятность, что каждый уйдёт в чужой шляпе, приблизительно равна $1/e \approx 0,37$.

4 Функция Эйлера

Напомним, что два натуральных числа называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей (кроме 1).

Функция Эйлера — это функция $\varphi(n)$ натурального аргумента n , равная количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n (при этом $\varphi(1) = 1$ по определению). Например, $\varphi(15) = 8$, поскольку имеется 8 натуральных чисел, меньших 15 и взаимно простых с ним: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14. Функция Эйлера играет важную роль в теории чисел и криптографии.

Пусть $n \geq 2$. Значение функции Эйлера числа n можно найти из разложения этого числа на простые множители:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$$

($p_1, p_2, \dots, p_r$ — все различные простые делители числа n). Покажем, что

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Если число k взаимно просто с n , то k не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \dots, p_r$. Мы найдём величину $\varphi(n)$, вычитая из n количество чисел, меньших n и делящихся хотя бы на одно из чисел $p_1, p_2, \dots, p_r$.

Пусть A_i — множество чисел, меньших n и делящихся на p_i ($i = 1, 2, \dots, r$). Имеем:

$$\begin{aligned} N = n - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| &= \\ &= n - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^r |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r|. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad |A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n}{p_i p_j p_k},$$

и так далее. Получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(n) = n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i < j < k} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \dots + (-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_r} &= \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right), \end{aligned}$$

что и требовалось.

5 Числа Стирлинга второго рода

В качестве ещё одного примера применения формулы включений и исключений рассмотрим следующую комбинаторную задачу (далее предполагается, что $m \geq n$).

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно разложить m различных шаров по n различным ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым?

РЕШЕНИЕ. Если ящики могут быть пустыми, то число способов разложить m различных шаров по n различным ящикам равно n^m — это просто число размещений с повторениями.

Пусть A_i — множество разложений шаров, при которых i -й ящик пуст ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда искомое число $D(m, n)$ разложений шаров, при которых все ящики непусты, равно:

$$\begin{aligned} D(m, n) = n^m - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \\ &= n^m - \sum_i |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$|A_i| = (n-1)^m, \quad |A_i \cap A_j| = (n-2)^m, \quad |A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)^m$$

и так далее. Получаем:

$$D(m, n) = n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - C_n^3(n-3)^m + \dots + (-1)^n \cdot 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

Задача решена.

Данная задача известна также и в другой формулировке. Прежде всего, дадим определение: функция $f: A \rightarrow B$ называется *сюръекцией*, если **каждый** элемент множества B имеет прообраз (то есть **для любого** $y \in B$ найдётся такой элемент $x \in A$, что $f(x) = y$). Например, функция $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$, задаваемая формулой $f(x) = \sin x$, является сюръекцией, а функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемая той же формулой $f(x) = \sin x$, сюръекцией уже не будет, так как число 2 не имеет прообраза.

ЗАДАЧА. Найти число сюръекций из m -элементного множества в n -элементное.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим функцию $f: A \rightarrow B$, где $|A| = m$ и $|B| = n$. Представим себе, что элементы множества A — это шары, а элементы множества B — это ящики. Тогда функция f есть некоторый способ разложить m различных шаров в n различных ящиков; при этом f будет сюръекцией в том и только в том случае, если при соответствующем разложении ни один ящик не окажется пустым. Следовательно, число сюръекций из A в B равно $D(m, n)$,

Интересна также ситуация, когда ящики *неразличимы*. Она приводит к отдельной комбинаторной задаче о числе разбиений множества.

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно разложить m различных шаров по n неразличимым ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым? Иными словами, сколькими способами можно представить m -элементное множество в виде объединения n непустых непересекающихся подмножеств?

РЕШЕНИЕ. Если ящики неразличимы, то любая перестановка n ящиков ничего не меняет, и поэтому число $D(m, n)$ разложений m различных шаров по n различным ящикам нужно разделить на $n!$:

$$S(m, n) = \frac{D(m, n)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

Получилось число способов разложить m шаров по n неразличимым ящикам, или число способов представления m -элементного множества в виде объединения n непересекающихся непустых подмножеств. Числа $S(m, n)$ называются *числами Стирлинга второго рода*.

Теперь допустим, что ящики могут быть пустыми.

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно разложить m различных шаров по n неразличимым ящикам? На число шаров в ящике ограничений нет.

РЕШЕНИЕ. При произвольной раскладке наши m шаров окажутся лежащими в каких-то k ящиках ($1 \leq k \leq n$), а остальные $n - k$ ящиков будут пустовать. Такое разложение можно осуществить $S(m, k)$ способами. Суммируя по k , получим искомое число способов:

$$\sum_{k=1}^n S(m, k).$$

6 Задачи

1. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

8375

2. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две одинаковых цифры?

763920

3. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две единицы?

7623

4. (ММО, 2006, 6, окружной этап) В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

3

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8) Найдите количество 10-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 87.

4366699934

6. (ММО, 2008, 7, окружной этап) По данным опроса, проведённого в 7 «Е» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются ещё и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «Е», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

26

7. («Физтех», 2016, 9–10) Рассматриваются всевозможные пятизначные числа, в которых цифры 9, 7, 3, 1, 0 используются ровно по одному разу. Найдите среднее арифметическое этих чисел. Ответ округлите до целого.

54166

8. Пусть A — множество букв слова «абракадабра», B — множество букв слова «бригантина», C — множество букв слова «каракатица». Выпишите множества A , B и C , найдите их всевозможные пересечения и проверьте формулу включений и исключений для трёх множеств.

9. (ММО, 1938) Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

989

10. («Ломоносов», 2012, 7) Сколько чисел из набора 1, 2, ..., 2010, 2011 не делятся ни на 3, ни на 7?

6149

11. («Физтех», 2014, 7, 8, 10) На столе рубашкой вверх была разложена колода из 36 игральных карт. Лёша перевернул 30 карт, затем Макс перевернул 19 карт, а после этого Боря — 21 карту. В результате вся колода оказалась рубашкой вниз. Сколько карт было перевернуто трижды?

21

12. («Физтех», 2013, 8–9) Трое ребят принялись красить лист ватмана, каждый — в свой цвет. Один закрасил красным 75% листа, второй закрасил зелёным 70% листа, а третий закрасил синим 65% листа. Сколько процентов листа будет заведомо закрашено всеми тремя цветами?

10%

13. («Ломоносов», 2013, 9) Найдите количество натуральных делителей числа $N = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{40}$, а) не являющихся ни точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел), ни точными кубами; б) не представимых в виде m^n , где m и n — натуральные числа, причём $n > 1$.

186 (9; 3601) а)

14. («Высшая проба», 2014, 10) В группе 17 человек знают английский язык, 14 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 19 человек знают польский язык. При этом 34 человека в группе знают ровно один язык из перечисленных, а остальные — ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе?

29

15. («Высшая проба», 2014, 11) В группе 15 человек знают английский язык, 16 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 21 человек знает польский язык. В группе нет людей, знающих три языка, и 23 человека в группе знают ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе знают ровно один язык из перечисленных?

96

16. («Высшая проба», 2013, 11) В стране шесть городов: А, Б, В, Г, Д и Е. Их хотят связать пятью авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

1296

17. (Олимпиада ВШЭ, 2011, 9) В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

369

18. (Олимпиада ВШЭ, 2011, 11) Класс из 20 учеников разделён на две половины так, что каждый школьник из первой половины дружит ровно с шестью одноклассниками, а каждый школьник из второй половины дружит ровно с четырьмя одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

450

19. («Физтех», 2014, 11) Прямоугольный параллелепипед $35 \times 40 \times 56$, разбитый на 78400 единичных кубиков, проткнули иглой по его диагонали. Сколько единичных кубиков протыкает игла?

112

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7–9) Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе:
а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество;
д) вынести мусор; е) пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

042