Уравнения и неравенства на олимпиадах высокого уровня

Данный листок посвящён задачам, которые внешне кажутся не столько олимпиадными, сколько экзаменационными. Однако они регулярно появляются на региональном и заключительном этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике и на Московской математической олимпиаде.

Разумеется, название «уравнения и неравенства» несколько условно и не охватывает целиком всё содержание листка. Сюда же относятся задачи, связанные с тождественными преобразованиями и оценками тригонометрических и логарифмических выражений, исследованием функций и их графиков и т. п.

Московская математическая олимпиада

После введения в 2011 году формата «первый день — второй день» (для 11 класса) такие задачи стали появляться на ММО каждый год.

1. (*ММО, 2017, 11.2*) Незнайка знаком только с десятичными логарифмами и считает, что логарифм суммы двух чисел равен произведению их логарифмов, а логарифм разности двух чисел равен частному их логарифмов. Может ли Незнайка подобрать хотя бы одну пару чисел, для которой действительно верны одновременно оба этих равенства?

2. (*ММО, 2017, 11.3*) Пусть x_0 — положительный корень уравнения $x^{2017} - x - 1 = 0$, а y_0 — положительный корень уравнения $y^{4034} - y = 3x_0$.

а) Сравните x_0 и y_0.

б) Найдите десятый знак после запятой числа $|x_0 - y_0|$.

3. (*ММО, 2016, 11*) Существует ли такое значение x, что выполняется равенство

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1\,?$$

4. (*ММО, 2015, 11*) Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

5. (*ММО, 2015, 11*) Какое наибольшее количество множителей вида $\sin\dfrac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{2\pi}{x}\sin\frac{3\pi}{x}\ldots\sin\frac{2015\pi}{x} = 0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

6. (*ММО, 2014, 11*) Найдите все значения a, для которых найдутся такие x, y и z, что числа $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$ попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа $\cos(x+a)$, $\cos(y+a)$ и $\cos(z+a)$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

7. (*ММО, 2014, 11*) Найдите все такие a и b, что

$$|a| + |b| \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$$

и при всех x выполнено неравенство

$$|a \sin x + b \sin 2x| \leqslant 1.$$

8. (*ММО, 2013, 11*) Найдите такое значение $a > 1$, при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

9. (*ММО, 2013, 11*) Сравните числа

$$\left(1 + \frac{2}{3^3}\right)\left(1 + \frac{2}{5^3}\right)\ldots\left(1 + \frac{2}{2013^3}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

10. (*ММО, 2012, 11*) Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций

$$y = 2a + \frac{1}{x-b} \quad \text{и} \quad y = 2c + \frac{1}{x-d}$$

имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций

$$y = 2b + \frac{1}{x-a} \quad \text{и} \quad y = 2d + \frac{1}{x-c}$$

также имеют ровно одну общую точку.

11. (*ММО, 2011, 11*) Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов

$$x^{2011} + 2011x - 1 \quad \text{и} \quad x^{2011} - 2011x + 1.$$

12. (*ММО, 2010, 10*) Можно ли, применяя к числу 2 функции sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg в любом количестве и в любом порядке, получить число 2010?

13. (*ММО, 2010, 11*) Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\frac{1}{a + \frac{2010}{b + \frac{1}{c}}},$$

где a, b, c — попарно различные ненулевые цифры?

14. (*ММО, 2007, 11*) Значение a подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2\cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2\cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при том же a имеет второе уравнение?

15. (*ММО, 2006, 10*) Может ли сумма тангенсов углов одного треугольника равняться сумме тангенсов углов другого, если один из этих треугольников остроугольный, а другой тупоугольный?

16. (*ММО, 2006, 11*) Какие значения может принимать разность возрастающей арифметической прогрессии $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_5$, все члены которой принадлежат отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$, если числа $\cos a_1,\ \cos a_2,\ \cos a_3$, а также числа $\sin a_3,\ \sin a_4$ и $\sin a_5$ в некотором порядке тоже образуют арифметические прогрессии?

17. (*ММО, 2005, 10*) Существует ли плоский четырёхугольник, у которого тангенсы всех внутренних углов равны?

18. (*ММО, 2005, 11*) Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

19. (*ММО, 2004, 11*) Для заданных натуральных чисел $k_0 < k_1 < k_2$ выясните, какое наименьшее число корней на промежутке $[0; 2\pi)$ может иметь уравнение вида

$$\sin(k_0 x) + A_1 \sin(k_1 x) + A_2 \sin(k_2 x) = 0$$

где A_1, A_2 — вещественные числа.

20. (*ММО, 2003, 10*) Дана бесконечная последовательность многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$. Всегда ли существует конечный набор функций $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_N(x)$, композициями которых можно записать любой из них (например, $P_1(x) = f_2(f_1(f_2(x)))$)?

21. (*ММО, 1997, 11*) Вычислите

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)\right) dx.$$

22. (*ММО, 1995, 10*) Известно число $\sin\alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать а) $\sin\frac{\alpha}{2}$; б) $\sin\frac{\alpha}{3}$?

23. (*ММО, 1993, 11*) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = p$, $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = q$. Найти $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

$\frac{pq}{q-p}$ при $p, q \neq 0$ и $p \neq q$. Нужно разобрать также остальные случаи

24. (*ММО, 1992, 10*) Докажите, что если сумма косинусов углов четырёхугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырёхугольник.

25. (*ММО, 1990, 11*) Найдите наибольшее значение выражения

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

26. (*ММО, 1988, 10*) Существует ли на координатной плоскости прямая, относительно которой симметричен график функции $y=2^x$?

27. (*ММО, 1987, 10*) а) Доказать, что из трёх положительных чисел всегда можно выбрать такие два числа x и y, что

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant 1.$$

б) Верно ли, что указанные два числа можно выбрать из любых четырёх чисел?

28. (*ММО, 1986, 10*) Решите уравнение $x^{x^4}=4$ $(x>0)$.

29. (*ММО, 1984, 10*) Не используя калькуляторов, таблиц и т. п., докажите неравенство

$$\sin 1<\log_3\sqrt{7}\,.$$

30. (*ММО, 1983, 10*) На доске после занятия осталась запись: «*Вычислить*

$$t(0)-t\left(\frac{\pi}{5}\right)+t\left(\frac{2\pi}{5}\right)-t\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\ldots+t\left(\frac{8\pi}{5}\right)-t\left(\frac{9\pi}{5}\right),$$

где $t(x)=\cos 5x+*\cos 4x+*\cos 3x+*\cos 2x+*\cos x+*$». Увидев её, студент мехмата сказал товарищу, что он может вычислить эту сумму, даже не зная значений стёртых с доски коэффициентов (вместо них в нашей записи $*$). Не ошибается ли он?

31. (*ММО, 1981, 10*) Доказать, что последовательность $x_n=\sin(n^2)$ не стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.

32. (*ММО, 1963, 10*) Положительные числа x, y, z обладают тем свойством, что

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z<\pi.$$

Доказать, что сумма этих чисел больше их произведения.

33. (*ММО, 1954, 10*) Найти все действительные решения уравнения

$$x^2+2x\sin(xy)+1=0.$$

34. (*ММО, 1952, 10*) Найдите соотношение между $\arcsin\cos\arcsin x$ и $\arccos\sin\arccos x$.

35. (*ММО, 1948, 9–10*) Доказать без помощи таблиц, что

$$\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2.$$

36. (*ММО, 1939*) Доказать, что

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}\,.$$

Всероссийская олимпиада школьников по математике

37. (*Всеросс., 2012, РЭ, 10.5*) Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася — значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Васей, оказаться различными?

38. (*Всеросс., 2004, ФОЭ, 10.1*) Сумма положительных чисел a, b, c равна $\frac{\pi}{2}$. Докажите, что

$$\cos a+\cos b+\cos c>\sin a+\sin b+\sin c.$$

39. (*Всеросс., 2003, ФОЭ, 10.1*) Найдите все углы α, для которых набор чисел $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ совпадает с набором $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$.

$\boxed{\alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}}$

40. (*Всеросс., 1998, ФОЭ, 10.1*) Пусть

$$f(x)=x^2+ax+b\cos x.$$

Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $f(x)=0$ и $f(f(x))=0$ имеют совпадающие непустые множества действительных корней.

41. (*Всеросс., 1995, финал, 10.1*) Решите уравнение $\cos(\cos(\cos(\cos x)))=\sin(\sin(\sin(\sin x)))$.

42. (*Всеросс., 2009, финал, 10.3*) Сколько раз функция

$$f(x)=\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2009}$$

меняет знак на отрезке $\left[0,\dfrac{2009\pi}{2}\right]$?

43. (*Всеросс., 2011, РЭ, 11.1*) Существует ли такое вещественное α, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ рациональны?

44. (*Всеросс., 2010, РЭ, 11.5*) Углы треугольника α, β, γ удовлетворяют неравенствам $\sin\alpha>\cos\beta$, $\sin\beta>\cos\gamma$, $\sin\gamma>\cos\alpha$. Докажите, что треугольник остроугольный.

45. (*Всеросс., 2009, РЭ, 11.3*) Докажите, что $x\cos x\leqslant\dfrac{\pi^2}{16}$ при $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

46. (*Всеросс., 2012, РЭ, 11.7*) Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

47. (*Всеросс., 2005, ФОЭ, 11.1*) Найдите все пары чисел $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие равенству $\sin x + \sin y = \sin(xy)$.

48. (*Всеросс., 1994, ФОЭ, 11.1*) Докажите, что при всех x, $0 < x < \frac{\pi}{3}$, справедливо неравенство

$$\sin 2x + \cos x > 1.$$

49. (*Всеросс., 2006, ФОЭ, 11.5*) Докажите, что для каждого x такого, что $\sin x \neq 0$, найдётся такое натуральное n, что $|\sin nx| \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

50. (*Всеросс., 2001, ФОЭ, 11.5*) Дана последовательность $\{x_k\}$ такая, что

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = n \sin x_n + 1.$$

Докажите, что последовательность непериодична.

51. (*Всеросс., 1995, ФОЭ, 11.5*) Для углов α, β, γ справедливо неравенство

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant 2.$$

Докажите, что

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \sqrt{5}\,.$$

52. (*Всеросс., 1997, ФОЭ, 11.6*) Докажите, что если $1 < a < b < c$, то

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0.$$

53. (*Всеросс., 2004, ФОЭ, 11.7*) При каких натуральных n для любых чисел α, β, γ, являющихся величинами углов остроугольного треугольника, справедливо неравенство

$$\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma < 0\,?$$

54. (*Всеросс., 2017, финал, 11.1*) Число x таково, что обе суммы $S = \sin 64x + \sin 65x$ и $C = \cos 64x + \cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.

55. (*Всеросс., 2014, финал, 11.1*) Существует ли такое положительное число a, что при всех действительных x верно неравенство

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax\,?$$

56. (*Всеросс., 2007, финал, 11.1*) Докажите, что при $k > 10$ в произведении

$$f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x \dots \cos 2^k x$$

можно заменить один cos на sin так, что получится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая при всех действительных x неравенству $|f_1(x)| \leqslant \dfrac{3}{2^{k+1}}$.

57. (*Всеросс., 2006, финал, 11.1*) Докажите, что $\sin\sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

58. (*Всеросс., 2005, финал, 11.1*) Какое наибольшее конечное число корней может иметь уравнение

$$|x - a_1| + \ldots + |x - a_{50}| = |x - b_1| + \ldots + |x - b_{50}|,$$

где $a_1, \ldots, a_{50}, b_1, \ldots, b_{50}$ — различные числа?

59. (*Всеросс., 2003, финал, 11.1*) Пусть α, β, γ, τ — такие положительные числа, что при всех x

$$\sin \alpha x + \sin \beta x = \sin \gamma x + \sin \tau x.$$

Докажите, что $\alpha = \gamma$ или $\alpha = \tau$.

60. (*Всеросс., 2009, финал, 11.5*) Пусть $1 < a \leqslant b \leqslant c$. Докажите, что

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \leqslant \log_b a + \log_c b + \log_a c.$$

61. (*Всеросс., 2000, финал, 11.5*) Докажите неравенство

$$\sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leqslant 1,$$

где n — любое натуральное число.

62. (*Всеросс., 2002, финал, 11.3*) Докажите, что для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ при $n > m$, где n, m — натуральные, справедливо неравенство

$$2\left|\sin^n x - \cos^n x\right| \leqslant 3\left|\sin^m x - \cos^m x\right|.$$