Рациональные и иррациональные числа

1. (*Всеросс., 2016, МЭ, 11*) Существует ли такое натуральное число n, большее 1, что значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом?

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11*) Найдите все пары натуральных чисел $x, y \in [1; 8]$, удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{x x, x x x \ldots} = y, y y y \ldots$$

(десятичная запись каждого из чисел $xx, xxx\ldots$ и $y, yyy\ldots$ состоит из бесконечного количества одинаковых цифр).

(1, 3) и (4, 6)

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) В периодической десятичной дроби 0,242424... первую цифру после запятой заменили на 4. Во сколько раз полученное число больше исходного?

В $\frac{73}{40}$ раз

4. (*«Ломоносов», 2011, 8–9*) Число $\frac{1711}{2011}$ обратили в бесконечную десятичную дробь, затем стёрли первую цифру после запятой и обратили получившуюся десятичную дробь в обыкновенную. Какую дробь получили?

$\frac{1022}{2011}$

5. Докажите, что число $\sqrt{2}$ иррационально.

6. (*Всеросс., 2000, ФОЭ, 8.1*) Ненулевые числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^2b^2(a^2b^2 + 4) = 2(a^6 + b^6).$$

Докажите, что хотя бы одно из них иррационально.

7. (*Всеросс., 2016, РЭ, 11.1*) Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трёхчлена $f(x)$ быть рациональным?

8. (*ОММО, 2016, 9–10*) Найдите все действительные числа x такие, что оба числа $x + \sqrt{3}$ и $x^2 + \sqrt{3}$ — рациональные.

9. (*Всеросс., 2014, РЭ, 9.5*) Число x таково, что среди четырёх чисел

$$x - \sqrt{2}, \quad x - \frac{1}{x}, \quad x + \frac{1}{x}, \quad x^2 + 2\sqrt{2}$$

ровно одно не является целым. Найдите все такие x.

10. (*«Ломоносов», 2017, 10–11*) Вычислите $\sqrt{n}+\sqrt{n+524}$, если известно, что это число рациональное и что n — натуральное.

262

11. (*Всеросс., 2017, РЭ, 9.5*) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

12. (*Всеросс., 2017, РЭ, 10.5*) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по ненулевому числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

13. (*Всеросс., 2017, РЭ, 11.5*) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

14. (*Всеросс., 2003, финал, 9.1*) Числовое множество M, содержащее 2003 различных числа, таково, что для каждых двух различных элементов a, b из M число $a^2+b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что для любого a из M число $a\sqrt{2}$ рационально.

15. (*Всеросс., 2005, финал, 9.5*) Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для каждых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.

16. (*ОММО, 2013*) Коробка конфет имеет форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания 10 и высотой $5\sqrt{3}$. Из двух разных вершин коробки $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две мухи, меняя направление движения только в вершинах. Одна муха начинает движение в вершине A и двигается только по рёбрам призмы, другая — только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время мухи встречаются. В каких вершинах коробки может произойти встреча?

17. (*«Высшая проба», 2014, 10*) Действительные числа a, b и c таковы, что числа ab, bc, ca — рациональные. Докажите, что существуют такие целые числа x, y, z, не равные одновременно нулю, что $ax+by+cz=0$.

18. (*«Курчатов», 2016, 11*) Дан квадратный трёхчлен x^2+bx+c. Докажите, что найдётся такое иррациональное x, при котором значение x^2+bx+c рационально.

19. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11.5*) Числа x, y и z таковы, что все три числа $x+yz$, $y+zx$ и $z+xy$ рациональны, а $x^2+y^2=1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

20. (*Всеросс., 2002, ФОЭ, 11.1*) Действительные числа x и y таковы, что для любых различных простых нечётных p и q число $x^p + y^q$ рационально. Докажите, что x и y — рациональные числа.

21. (*Всеросс., 2006, ФОЭ, 10.7*) При каких натуральных n найдутся такие положительные рациональные, но не целые числа a и b, что оба числа $a + b$ и $a^n + b^n$ — целые?

22. (*Всеросс., 2003, финал, 10.1*) Числовое множество M, содержащее 2003 различных положительных числа, таково, что для любых трёх различных элементов a, b, c из M число $a^2 + bc$ рационально. Докажите, что можно выбрать такое натуральное n, что для любого a из M число $a\sqrt{n}$ рационально.

23. (*Всеросс., 2004, финал, 10.5*) Последовательность неотрицательных рациональных чисел a_1, a_2, a_3,... удовлетворяет соотношению $a_m + a_n = a_{mn}$ при любых натуральных m, n. Докажите, что не все её члены различны.

24. (*Всеросс., 2014, финал, 9.7, 10.7*) В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

25. (*Всеросс., 1999, финал, 11.2*) Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдётся такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.

26. (*Всеросс., 2006, финал, 11.2*) Сумма и произведение двух чисто периодических десятичных дробей — чисто периодические дроби с периодом T. Докажите, что исходные дроби имеют периоды не больше T.

27. (*Всеросс., 2014, финал, 11.3*) Положительные рациональные числа a и b записаны в виде десятичных дробей, у каждой из которых минимальный период состоит из 30 цифр. У десятичной записи числа $a - b$ длина минимального периода равна 15. При каком наименьшем натуральном k длина минимального периода десятичной записи числа $a + kb$ может также оказаться равной 15?

28. (*ММО, 1993, 10.1*) При разложении чисел A и B в бесконечные десятичные дроби длины минимальных периодов этих дробей равны 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода числа $A + B$?

29. (*ММО, 1994, 10.2, 11.2*) Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями:

$$x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|,$$

причём $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$. Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая а) в том б) и только в том случае, когда x_1 рационально.

30. (*ММО, 1998, 11.2*) Про непрерывную функцию f известно, что:

1) f определена на всей числовой прямой;

2) f в каждой точке имеет производную (и, таким образом, график f в каждой точке имеет единственную касательную);

3) график функции f не содержит точек, у которых одна из координат рациональна, а другая — иррациональна.

Следует ли отсюда, что график f — прямая?

31. (*ММО, 2007, 10.6*) С ненулевым числом разрешается проделывать следующие операции:

$$x \mapsto \frac{1+x}{x}, \quad x \mapsto \frac{1-x}{x}.$$

Верно ли, что из каждого ненулевого рационального числа можно получить каждое рациональное число с помощью конечного числа таких операций?

32. (*Турнир городов, 2005, 8–9*) Назовём треугольник *рациональным*, если все его углы измеряются рациональным числом градусов. Назовём точку внутри треугольника *рациональной*, если при соединении её отрезками с вершинами мы получим три рациональных треугольника. Докажите, что внутри любого остроугольного рационального треугольника найдутся как минимум три различные рациональные точки.

33. (*Турнир городов, 1996, 10–11*) Дано n чисел, p — их произведение. Разность между p и каждым из этих чисел — нечётное число. Докажите, что все данные n чисел иррациональны.

34. (*Турнир городов, 1995, 10–11*) Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка? (Рациональная точка — точка, у которой все три декартовы координаты — рациональные числа.)