Функциональные вычисления

1. («Ломоносов», 2012, 9) Функция $f(x)$ удовлетворяет при каждом значении x равенству

$$f(x + 2) = f(x) + 4x + 4.$$

Найдите $f(2012)$, если $f(2) = 0$.

$f(2012) = 2012^2 - 4 = 4048140$

2. («Ломоносов», 2016, 9) Найдите величину

$$f\left(\frac{1}{2016}\right) + f\left(\frac{2}{2016}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2016}\right),$$

если $f(x) = \frac{x^3 + 9x - 2}{x^2 - x + 2}$.

$3026,5$

3. (ММО, 2007, окружной тур, 11) Функция f такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$. Найдите $f(2007)$, если $f\left(\frac{1}{2007}\right) = 1$.

-1

4. (ОММО, 2015, 9–10) Будем обозначать $f^{(n)}(x)$ последовательное применение n раз функции f (например, $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ и т. д.). Даны функции $g(x) = \frac{1}{x+1}$ и $h(x) = \frac{x+1}{x}$. Найдите значение выражения $g^{(2015)}(100) \cdot h^{(2015)}(1/100)$.

1

5. (ОММО, 2009) Пусть $f(x) = \frac{x}{3} + 2$. Найдите значение функции

$$\underbrace{f(\dots f(f(x)) \dots)}_{2009}$$

в точке $x = 4$.

$3 + \frac{1}{3}$

6. (ОММО, 2011) Функция f такова, что $f(2x - 3y) - f(x + y) = -2x + 8y$ для всех x, y . Найдите все возможные значения выражения $\frac{f(5t) - f(t)}{f(4t) - f(3t)}$.

4

7. (ОММО, 2012) Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет равенству $f(x + 3) = x + 2 - f(x)$, а при $x \in [-3; 0)$ задаётся формулой $f(x) = x^2$. Найдите $f(2012)$.

1001

8. (ОММО, 2013) Пусть

$$S_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1).$$

Найдите S_{2013} для $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$.

2001

9. («Физтех», 2016, 10) Про функцию $f(x)$ и некоторое положительное число c известно, что

$$f(x+c) = \frac{\sqrt{3}f(x)+1}{\sqrt{3}-f(x)}$$

при всех значениях x . При каком наименьшем целом значении k из интервала $(25; 50)$ можно утверждать, что $f(x+kc) = f(x)$ при всех x ?

08

10. («Физтех», 2016, 11) Пусть $f(n)$ — целое число, ближайшее к числу $\sqrt{n}$. Обозначим $g(n) = \frac{1}{f(n)}$. Найдите сумму

$$g(211) + g(212) + \dots + g(2025).$$

19