

Целая и дробная части

1. (Турнир городов, 2016, 8–9) Существуют ли такие целые числа a и b , что
а) уравнение $x^2 + ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + ax + b = 0$ имеет;
б) уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + 2ax + b = 0$ имеет?
2. (Турнир городов, 1990, 8–9) Найти число решений в натуральных числах уравнения

$$\left[\frac{x}{10} \right] = \left[\frac{x}{11} \right] + 1.$$

3. (Турнир городов, 1985, 7–8) а) Привести пример такого положительного a , что

$$\{a\} + \left\{ \frac{1}{a} \right\} = 1.$$

б) Может ли такое a быть рациональным числом?

4. (Турнир городов, 1996, 8–9) В ряд выписаны действительные числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1996}$. Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.

5. (ММО, 1981, 7.4, 8.4) Дано число x , большее 1. Обязательно ли имеет место равенство

$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]} \right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}} \right] ?$$

6. (Моск. матем. регата, 2012, 10) Решите неравенство: $[x] \cdot \{x\} < x - 1$.

7. («Курчатов», 2014, 11) Решите уравнение $[x] \cdot \{x\} = x^2$.

8. (ММО, 1957, 9.2) Решите уравнение: $x^3 - [x] = 3$.

9. (Всеросс., 1998, округ, 10.5) Решите уравнение : $\{(x+1)^3\} = x^3$.

10. (ММО, 1955, 8.5) Числа $[a], [2a], \dots, [Na]$ различны между собой, и числа $\left[\frac{1}{a}\right], \left[\frac{2}{a}\right], \dots, \left[\frac{M}{a}\right]$ тоже различны между собой. Найти все такие a .

11. (ММО, 1969, 10.4) Существует ли такое число x , что ни для какого натурального числа n число $[x \cdot 1969^n]$ не делится на $[x \cdot 1969^{n-1}]$?

12. (Турнир городов, 2002, 10–11) Существуют ли такие иррациональные числа a и b , что $a > 1$, $b > 1$ и $[a^m]$ отлично от $[b^n]$ при любых натуральных числах m и n ?

13. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Фирма записала свои расходы в рублях по 100 статьям бюджета, получив список из 100 чисел (у каждого числа не более двух знаков после запятой). Каждый счетовод взял копию списка и нашёл приближённую сумму расходов, действуя следующим образом. Вначале он произвольно выбрал из списка два числа, сложил их, отбросил у суммы знаки после запятой (если они были) и записал результат вместо выбранных двух чисел. С полученным списком из 99 чисел он проделал то же самое, и так далее, пока в списке не осталось одно целое число. Оказалось, что в итоге все счетоводы получили разные результаты. Какое наибольшее число счетоводов могло работать в фирме?

14. (*Турнир городов, 1983, 9–10*) Докажите для каждого натурального числа $n > 1$ равенство:

$$\left[n^{\frac{1}{2}} \right] + \left[n^{\frac{1}{3}} \right] + \dots + \left[n^{\frac{1}{n}} \right] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \dots + [\log_n n].$$

15. (*Всеросс., 2000, финал, 10.1*) Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3} \right] + \left[\frac{2}{3} \right] + \left[\frac{2^2}{3} \right] + \left[\frac{2^3}{3} \right] + \dots + \left[\frac{2^{1000}}{3} \right].$$

16. (*Всеросс., 1999, финал, 9.6*) Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n^2} \left\{ \sqrt{k} \right\} \leq \frac{n^2 - 1}{2}.$$

17. (*«Ломоносов», 2008*) Найдите все натуральные значения n , удовлетворяющие уравнению

$$2004 \left[n\sqrt{1002^2 + 1} \right] = n \left[2004\sqrt{1002^2 + 1} \right],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее числа x .