Планиметрия на олимпиаде «Ломоносов»

1. (*«Ломоносов», 2016, 7–9*) В прямоугольнике $ABDF$ на сторонах $BD = 2$ и $DF = 3$ выбрали точки C и E соответственно, так, что треугольник AFE равен треугольнику EDC. Потом от прямоугольника $ABDF$ отрезали треугольники ABC, CDE и AFE. Найдите углы оставшегося треугольника.

$\boxed{90^\circ,\ 45^\circ,\ 45^\circ}$

2. (*«Ломоносов», 2015, 8*) В равностороннем треугольнике ABC на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2 так, что $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$. На стороне AC выбрана точка B_1 так, что $AB_1 : B_1C = 1 : 2$. Найдите сумму углов AA_1B_1 и AA_2B_1.

$\boxed{30^\circ}$

3. (*«Ломоносов», 2012, 8*) На сторонах AB, BC, CD и DA равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD отметили точки K, L, M и N соответственно. Оказалось, что $KLMN$ — параллелограмм. Докажите, что $KP = MQ$, где P и Q — середины сторон AB и CD соответственно.

4. (*«Ломоносов», 2011, 8*) Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена медиана CM. Окружность, вписанная в треугольник ACM, касается стороны CM в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

$\boxed{30^\circ,\ 60^\circ,\ 90^\circ}$

5. (*«Ломоносов», 2014, 8–9*) Хорда AC образует угол 32° с диаметром AD. Из центра окружности O опущен перпендикуляр OH на хорду AC, его продолжение пересекает окружность в точке B. Найдите угол между прямыми BC и AD.

$\boxed{3^\circ}$

6. (*«Ломоносов», 2015, 8–9*) В треугольнике ABC, основание AB которого лежит на оси абсцисс, проведены высоты AM, BN и CK. Найдите длину основания AB, если известны координаты точек $M(2, 2)$ и $N(4, 4)$.

$\boxed{4\sqrt{5}}$

7. (*«Ломоносов», 2013, 8–9*) Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1, B_1, C_1 и D_1 такие, что точка A является серединой отрезка DD_1, точка B — серединой AA_1, точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1. Найдите площадь четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $S(ABCD) = 1$.

$\boxed{5}$

8. (*«Ломоносов», 2017, 9*) Из отрезков длин 3, 5, 7 и 9 составлен четырёхугольник, в который вписана окружность. К ней проведены две касательные: одна пересекает одну пару соседних сторон четырёхугольника, а другая — пару оставшихся. Найдите разность периметров треугольников, отсечённых от четырёхугольника этими касательными.

$\boxed{4 \text{ или } 8}$

9. (*«Ломоносов», 2012, 9*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найдите величину угла ACB, если известно, что $\angle ACD = 72°$ и $AB = BD$.

$\boxed{54°}$

10. (*«Ломоносов», 2015, 9*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ площади треугольников ABD и BCD равны, а площадь ACD равна половине площади ABD. Найдите длину отрезка CM, где M — середина стороны AB, если известно, что $AD = 12$.

$\boxed{18}$

11. (*«Ломоносов», 2013, 9*) Две окружности радиусов R и R' касаются друг друга внешним образом в точке P и касаются прямой l в точках A и B соответственно. Пусть Q — точка пересечения прямой BP с первой окружностью. Определить, на каком расстоянии от прямой l расположена точка Q.

$\boxed{2R}$

12. (*«Ломоносов», 2011, 9*) В равнобедренном треугольнике ABC провели биссектрису BP. Докажите, что если угол BAC равен $100°$, то $AP + PB = BC$.

13. (*«Ломоносов», 2017, 10–11*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются на прямой BD. Найдите сторону AD, если $AB = 2$ и $BC : CD = 4 : 5$.

$\boxed{\frac{5}{2}}$

14. (*«Ломоносов», 2016, 10–11*) В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3 \cdot \overrightarrow{AA_1} + 4 \cdot \overrightarrow{BB_1} + 5 \cdot \overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2, 1)$.

$\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{3}}$

15. (*«Ломоносов», 2015, 10–11*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и DB перпендикулярны сторонам DC и AB соответственно. Из точки B проведён перпендикуляр на сторону AD, пересекающий AC в точке O. Найдите AO, если $AB = 4$, $OC = 6$.

$\boxed{2}$

16. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Прямоугольник, отношение сторон которого равно 5, имеет наибольшую площадь среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба. Найдите острый угол ромба.

$\boxed{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}}$

17. (*«Ломоносов», 2013, 10–11*) В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, а диагонали пересекаются в точке O, на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 2 : 1$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 1 : 2$. Найти площадь треугольника COD, если $AD = 5$, $BC = 2$, $KM = 7/3$, а $\cos\angle CAD = 1/3$.

$\boxed{\frac{20\sqrt{2}}{27}}$

18. (*«Ломоносов», 2012, 10–11*) Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка BO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D. Найдите угол B, если $OD = 4AC$.

$\boxed{2 \arccos \frac{1}{8} = \arccos\left(-\frac{31}{32}\right)}$

19. (*«Ломоносов», 2011, 10–11*) Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке K. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке L, делящей хорду в отношении $AL : BL = 2 : 3$. Найдите AK, если $BK = 12$.

$\boxed{8}$

20. (*«Ломоносов», 2010*) На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E, а на боковых сторонах AB и BC точки D и F так, что $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF, если $BF : EF = 2 : 3$?

$\boxed{\frac{6}{25}}$

21. (*«Ломоносов», 2010*) Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 1$ пересекаются в точке O. Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O, а прямой AD — в точках A и D соответственно. Найдите $AK^2 + DL^2$.

$\boxed{12}$

22. (*«Ломоносов», 2009*) Две окружности касаются внешним образом: друг друга в точке A, а третьей окружности — в точках B и C. Продолжение хорды AB первой окружности пересекает вторую окружность в точке D, продолжение хорды AC пересекает первую окружность в точке E, а продолжения хорд BE и CD — третью окружность в точках F и G соответственно. Найдите BG, если $BC = 5$ и $BF = 12$.

$\boxed{13}$

23. (*«Ломоносов», 2008*) Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

$\boxed{3 \text{ или } 2\sqrt{3}}$

24. (*«Ломоносов», 2007*) На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

$\boxed{10}$

25. (*«Ломоносов», 2006*) Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E, при этом $BD = 9$ и $BE = 12$. Найдите радиусы окружностей.

$\boxed{8 \text{ или } 36}$

26. (*«Ломоносов», 2005*) Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC = 5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

$\boxed{25}$

27. (*«Ломоносов», 2005*) На окружности взята точка A, на её диаметре BC — точки D и E, а на его продолжении за точку B — точка F. Найдите BC, если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$ и $BF = 4$.

$\boxed{11}$