

Планиметрия на олимпиаде «Физтех»

1. («Физтех», 2017, 9) В треугольник ABC вписаны два равных прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB , точки Q и Q_1 лежат на стороне BC , а точки R, S, R_1 и S_1 — на стороне AC). Известно, что $PS = 12$, $P_1S_1 = 3$. Найдите площадь треугольника ABC .

$\frac{2}{225}$

2. («Физтех», 2017, 9–10) Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Градусные меры дуг AD и CD , не содержащих точки B , равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC .

$1 : \sqrt{3}$

3. («Физтех», 2017, 9–10) В треугольнике ABC проведена медиана BM ; MD и ME — биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P , причём $BP = 2$, $MP = 4$.

а) Найдите отрезок DE .

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

$8\sqrt{2}$ (а)

4. («Физтех», 2017, 9–10) В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке A_2 . Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C (O — центр окружности, описанной около треугольника ABC).

$\frac{13\sqrt{3}}{12}$ и $\frac{13\sqrt{3}}{24}$

5. («Физтех», 2017, 10–11) Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD пересекаются в точке Q . Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 7.

а) Найдите AC .

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD , касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

$14; 6; 45^\circ$ (а)

6. («Физтех», 2017, 11) В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C . Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω , описанной около треугольника ABC . Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 4 и 9.

а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC .

б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны AB .

$\frac{2}{16}$ и $\frac{2}{32}$ (а)

7. («Физтех», 2016, 9) Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 120° при вершине K . В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и O соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника FKO , если $AO = 2$, $AF = 7$.

$$\frac{3}{5}\sqrt{7}$$

8. («Физтех», 2016, 9) Окружность проходит через вершины K и P треугольника KPM и пересекает его стороны KM и PM в точках F и B соответственно, причём $KF : FM = 3 : 1$, $PB : BM = 6 : 5$. Найдите KP , если $BF = \sqrt{15}$.

$$2\sqrt{33}$$

9. («Физтех», 2016, 9) Окружность проходит через вершины Q и E треугольника MQE и пересекает его стороны MQ и ME соответственно в точках B и D , отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BDM к площади треугольника MQE равно $9/121$.

а) Найдите отношение $QE : BD$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BME и DQM равно 4. Найдите отношение $BQ : DE$.

$$61 : 5 \text{ ; } 3 : 11 \text{ (a)}$$

10. («Физтех», 2016, 10) Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω . Точка F — середина дуги PN , не содержащей точки Q . Известно, что расстояния от точки F до прямых PN и QN равны соответственно 5 и $20/3$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ .

$$\frac{6}{33\sqrt{33}} \text{ ; } 9$$

11. («Физтех», 2016, 10) Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω . Расстояние от середины дуги PN , не содержащей точки Q , до стороны PN равно 4, а расстояние от середины дуги QN , не содержащей точки P , до стороны QN равно $0,4$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ .

$$5 \text{ ; } \frac{192\sqrt{6}}{25}$$

12. («Физтех», 2016, 10) Равнобедренный треугольник PQT с основанием PQ вписан в окружность Ω . Хорды AB и CD , параллельные прямой PQ , пересекают сторону QT в точках L и M соответственно, и при этом $QL = LM = MT$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника PQT , если $AB = 2\sqrt{14}$, $CD = 2\sqrt{11}$, а центр O окружности Ω расположен между прямыми AB и CD .

$$81 \text{ ; } \frac{7}{5}$$

13. («Физтех», 2016, 11) Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = DE = 2$, $CD = 1$. Окружности Ω и ω , касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E , а ω проходит через точки B и C . Найдите радиусы окружностей Ω и ω , если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

$$R = \frac{61\sqrt{2}}{11} \text{ ; } r = \frac{61\sqrt{2}}{8}$$

14. («Физтех», 2016, 11) Окружность ω радиуса 4 с центром O вписана в остроугольный треугольник EFQ и касается его сторон FQ и EQ в точках M и P соответственно. Окружность Ω радиуса $\sqrt{65}/2$ с центром T описана около треугольника PQM .

а) Найдите OQ .

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника FTE к площади треугольника EFQ равно $2/3$. Найдите длину биссектрисы QA треугольника EFQ , а также его площадь.

$$\sqrt{8} = S, \frac{2}{\sqrt{65}} = \sqrt{2} \text{ (a)}$$

15. («Физтех», 2016, 11) В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке M . Окружность, построенная на отрезке BM как на диаметре, проходит через вершину C и касается прямой DE . Известно, что $CM = 4$. Найдите высоту AH треугольника ABC , угол CBD и площадь треугольника ABC .

$$\sqrt{3} \text{ (a)}$$

16. («Физтех», 2015, 10–11) На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90° .

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMS$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF : FC = 1 : 4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL .

$$\frac{1}{2} \text{ (a)}$$

17. («Физтех», 2015, 10–11) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AD в точке K , а вторая касается стороны BC в точке T .

а) Найдите радиус окружности Ω_1 , если $AK = 2$, $CT = 8$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC . Найдите угол BDC .

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} \text{ (a)}$$

18. («Физтех», 2015, 10–11) В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1 , K_2 и K соответственно, при этом $AK_1 = 4$, $BK_2 = 6$ и $AB = 16$.

а) Найдите длину отрезка AK .

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3 . Найдите угол CAB , если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3 .

$$\frac{5}{2} \text{ (a)}$$

19. («Физтех», 2014) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали BD , касается отрезков BC , CD и AD в точках M , N и K соответственно. Известно, что $BM = 3$, а четырёхугольник $KОВА$ вписан в окружность Ω . Найдите угол COD , площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω .

$$\frac{6}{\sqrt{13}} \text{ (a)}$$

20. («Физтех», 2014) Четырёхугольник $ABKD$ вписан в окружность Ω радиуса $\sqrt{17}$. На стороне KD выбрана точка C так, что $\angle BCD = 90^\circ$. Окружность ω радиуса 4, описанная вокруг треугольника BCK , касается отрезка AD и прямой AB . Найдите длину отрезка AB , угол BAD и площадь четырёхугольника $ABCD$.

$$\frac{2}{23} \cdot \frac{5}{25} \cos \alpha - \pi = 2 \arctan 2, 2$$

21. («Физтех», 2013) В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin \frac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω , проходящая через точки A, C и D , пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причём $AN = 11, BL = 6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω .

$$\frac{6 \sqrt{4}}{26} = \pi, 9 \sqrt{09} = S$$

22. («Физтех», 2013) Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD , причём $BC < AD, \angle BCD = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка CD . Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке M , а $\cos \angle BMC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков AB и BC , а также площадь трапеции.

$$\frac{6}{2} = S, \frac{6}{10} = \cos \alpha, 10 = \pi$$

23. («Физтех», 2012) Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD . Их точки касания с меньшей окружностью — A и B , с большей окружностью — C и D . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = 24/5, AC = 12$.

$$3 \text{ и } 12$$

24. («Физтех», 2012) В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке E , а прямую BC — в точке F , причём $AE \perp CD, EF = 4$. Найдите длины отрезков AE и AD , а также площадь трапеции.

$$AE = 12, AD = 15, S = 96$$

25. («Физтех», 2011) В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $1/4$ с центром на отрезке CD проходит через точку D и касается отрезка BC в точке E такой, что угол BED равен $\arctg \frac{4}{3}$. Найдите высоту параллелограмма DF , проведённую к стороне BC , и длину отрезка CD . Найдите площадь параллелограмма, если $AB = BE$.

$$DF = 8/25, CD = 24/21, S = 16/25$$

26. («Физтех», 2011) В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{3}$ с центром на отрезке BC проходит через точку B и касается отрезка AC в точке D такой, что угол ADB равен $\arctg \frac{3}{2}$. Найдите высоту BF треугольника ABC и длину отрезка CD . Найдите площадь треугольника ABC , если длины отрезков AB и CD равны.

$$\left(\frac{1}{15} \sqrt{45} + 36 \right) \frac{5}{6} = S, \frac{5}{22}, S = 6, CD = 6$$

27. («Физтех», 2010) В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2 \arctg \frac{1}{2}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC вчетверо больше площади треугольника ADC . Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC .

$$\frac{2 \sqrt{5}}{32}, \frac{2 \sqrt{265}}{32}$$

28. («Физтех», 2010) В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон AB и CD равны соответственно 3 и 5, а длина основания AD больше длины BC . Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $5/11$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и длины её диагоналей.

$$\frac{3}{26}\sqrt{2} = AB, \frac{5}{10}\sqrt{2} = CD, \frac{3}{14}\sqrt{2} = r$$

29. («Физтех», 2009) Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O , а их длины равны соответственно 30, 24 и 18. Найдите площади треугольников ABC и OA_1C , а также радиус окружности, описанной около треугольника OA_1C .

$$288, 48, \frac{4}{25}$$

30. («Физтех», 2009) В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC , а точка E лежит на отрезке AD . Известно, что углы ABE , DBE и CBD равны, а длина отрезка DE вдвое меньше длины отрезка CD и втрое меньше длины отрезка AE . Найдите углы ABE и ACB .

$$\angle ABE = 45^\circ, \angle ACB = \arctg \frac{5}{1}$$

31. («Физтех», 2008) В треугольнике ABC медиана BM равна 2, угол ABM равен $\arctg \frac{2}{3}$, угол CBM равен $\arctg \frac{1}{5}$. Найти стороны AB , BC и биссектрису BE треугольника ABC .

$$AB = \frac{4}{\sqrt{13}}, BC = \frac{8\sqrt{2}}{8}, BE = \frac{8\sqrt{2}(\sqrt{13}+2\sqrt{2})}{(2\sqrt{2}+2\sqrt{2})}$$

32. («Физтех», 2007) Окружность ω с центром O на стороне AC треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $AD = 2CE$, а угол DOE равен $\arcsctg \frac{1}{3}$. Найти углы треугольника ABC и отношение его площади к площади круга, ограниченного окружностью ω .

$$\angle ABC = \pi - \arcsctg \frac{5}{3}, \angle ACB = \frac{\pi}{4}, \angle BAC = \arcsctg 2; \frac{6\pi}{2\sqrt{10}+7}$$