Геометрия на ММО. 10 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Московской математической олимпиаде в 10 классе. В скобках после номера задачи указан год проведения олимпиады, а также порядковый номер задачи в соответствующем варианте (что позволяет составить некоторое представление о сложности задачи).

1. (*2017, №3*) Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AOC вторично пересекает стороны AB и BC в точках E и F. Оказалось, что прямая EF делит площадь треугольника ABC пополам. Найдите угол B.

2. (*2016, №2*) Внутри выпуклого четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$ нашлась такая точка C, что треугольники CA_1A_2 и CB_1B_2 — правильные. Точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно прямых A_2B_2 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

3. (*2016, №5*) В куб с ребром 1 поместили 8 непересекающихся шаров (возможно, разного размера). Может ли сумма диаметров этих шаров быть больше 4?

4. (*2015, №5*) Дан треугольник ABC. Проведены высота AH и медиана CM. Обозначим точку их пересечения через P. Высота, проведённая из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM, в точке Q. Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.

5. (*2014, №3*) Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.