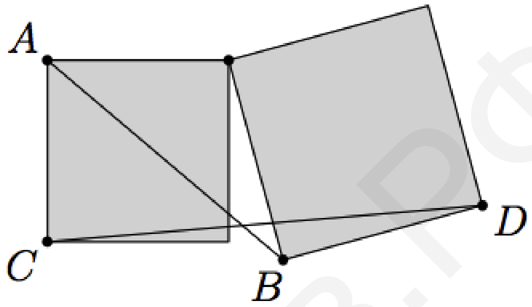
Геометрия на Всероссийской олимпиаде. 9 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Всероссийской олимпиаде по математике в 9 классе.

Третий этап (региональный) и четвёртый этап (заключительный) проводятся в два дня; задачи 1, 2, 3, 4 предлагаются в первый день, задачи 5, 6, 7, 8 — во второй. Задачи внутри варианта расположены обычно по возрастанию сложности.

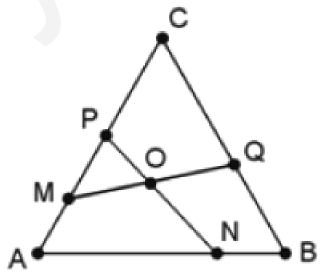
Принцип нумерации задач листка: задача **16.3.8** предлагалась в 2015/16 учебном году на третьем (региональном) этапе под номером 8.

18.1.4. Два квадрата имеют общую вершину. Найдите отношение отрезков AB и CD, показанных на рисунке.



$1:\sqrt{2}$

17.1.5. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a точки M, N, P, Q расположены так, как показано на рисунке. Известно, что $MA + AN = PC + CQ = a$. Найдите величину угла NOQ.



60°

17.2.3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных на прямую DE из точек A и C соответственно. Докажите, что $ME = DN$.

17.2.6. Высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. O — центр описанной окружности треугольника BHC. Центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке OA. Найдите угол BAC.

60°

17.3.4. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ касается ω. Окружность Ω_b с центром P проходит через вершину B, а окружность Ω_c с центром Q — через C. Докажите, что окружности Ω, Ω_b и Ω_c имеют общую точку.

17.3.6. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30°$, то $AK = BC$.

17.4.2. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω проходит через вершины B и C и вторично пересекает сторону AB и диагональ BD в точках X и Y соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке C, пересекает луч AD в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

17.4.7. Неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 60°$, вписан в окружность Ω. На биссектрисе угла BAC выбрана точка A', а на биссектрисе угла ABC — точка B' так, что $AB' \parallel BC$ и $BA' \parallel AC$. Прямая $A'B'$ пересекает Ω в точках D и E. Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.

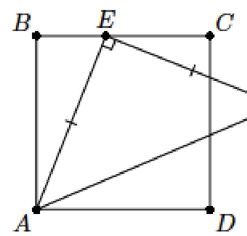
16.1.5. В треугольнике ABC медиана, выходящая из вершины A, перпендикулярна биссектрисе угла B, а медиана, выходящая из вершины B, перпендикулярна биссектрисе угла A. Известно, что сторона $AB = 1$. Найдите периметр треугольника ABC.

5

16.2.3. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. На стороне AB выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C — точка Q так, что отрезок PQ касается окружности. Докажите, что $\angle BOP = \angle COQ$.

16.2.5. Квадрат $ABCD$ и равнобедренный прямоугольный треугольник AEF ($\angle AEF = 90°$) расположены так, что точка E лежит на отрезке BC (см. рисунок). Найдите угол DCF.

45°



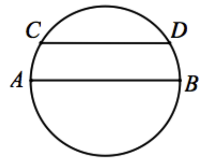
16.3.2. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведён диаметр CC'. Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$.

16.3.8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90°$. Пусть M — середина стороны BC. Оказалось. что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

16.4.2. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

16.4.7. Окружность ω вписана в треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Вневписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A'. Точка X выбирается на отрезке $A'A$ так, что отрезок $A'X$ не пересекает ω. Касательные, проведённые из X к ω, пересекают отрезок BC в точках Y и Z. Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X.

15.1.5. В окружности провели диаметр AB и параллельную ему хорду CD так, что расстояние между ними равно половине радиуса этой окружности (см. рисунок). Найдите угол CAB.



$\boxed{75^\circ}$

15.2.3. Дан треугольник ABC. Прямая, параллельная AC, пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно, а медиану AM — в точке Q. Известно, что $PQ = 3$, а $QT = 5$. Найдите длину AC.

$\boxed{AC = 11}$

15.2.5. Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. На его диагоналях AC и BD отметили точки K и L соответственно так, что $AK = AB$ и $DL = DC$. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.

15.3.4. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC, отличные от прямой AC. Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

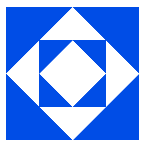
15.3.6. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

15.4.2. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол ABC.

$\boxed{60^\circ}$

15.4.7. Остроугольный треугольник ABC ($AB < AC$) вписан в окружность Ω. Пусть M — точка пересечения его медиан, а AH — высота этого треугольника. Луч MH пересекает Ω в точке A'. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A'HB$, касается AB.

14.1.2. Каково отношение площади закрашенной части к белой (вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?



$\boxed{5 : 3}$

14.2.3. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O, которая касается стороны AB в точке E. На продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $AD = AC/2$. Докажите, что прямые DE и AO параллельны.

14.2.5. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG, если $DE = 5$ см.

$\boxed{10\text{ см}}$

14.3.2. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов DAC, DBC, ACB и ADB образовали ромб, то $AB = CD$.

14.3.7. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

$\boxed{90^\circ}$

14.4.4. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Касательные к Ω, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке P. Отрезки BP и AC пересекаются в точке S. Пусть AD — высота треугольника ABP. Окружность ω, описанная около треугольника CSD, пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$.

14.4.6. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.