

Геометрия на ММО. 9 класс

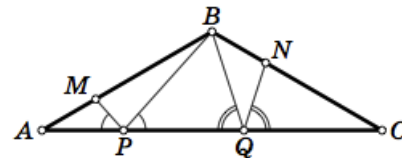
Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Московской математической олимпиаде в 9 классе. В скобках после номера задачи указан год проведения олимпиады, а также порядковый номер задачи в соответствующем варианте (что позволяет составить некоторое представление о сложности задачи).

1. (2017, №6) В треугольнике ABC с углом A , равным 45° , проведена медиана AM . Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1 , а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1 . Прямые b и c пересеклись в точке X . Докажите, что $AX = BC$.
2. (2016, №2) В треугольнике ABC на продолжении медианы CM за точку C отметили точку K так, что $AM = CK$. Известно, что угол BMC равен 60° . Докажите, что $AC = BK$.
3. (2016, №4) Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Прямая, перпендикулярная стороне AC , пересекает сторону BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B , O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности.
4. (2015, №4) Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC . Две равные окружности касаются сторон AB , BC и AC , BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K . Оказалось, что K лежит на прямой OI . Найдите $\angle BAC$.
5. (2014, №4) На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, её размеры могут отличаться от размеров стола.)
6. (2013, №2) В треугольнике ABC , где угол B прямой, а угол A меньше угла C , проведена медиана BM . На стороне AC взята точка L так, что $\angle ABM = \angle MBL$. Описанная окружность треугольника BML пересекает сторону AB в точке N . Докажите, что $AN = BL$.
7. (2012, №3) В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD . На отрезке BH отметили точку M , равноудалённую от точек C и D . Пусть K — середина стороны AB . Докажите, что угол MKD прямой.
8. (2012, №5) Дан треугольник ABC . Прямая l касается вписанной в него окружности. Обозначим через l_a , l_b , l_c прямые, симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC .
9. (2011, №3) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен 30° . Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , D — точка пересечения отрезка BI с этой окружностью. Докажите, что отрезки AI и CD перпендикулярны.
10. (2011, №5) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC лучи AB и DC пересекаются в точке K . Точки P и Q — центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD . Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$.

11. (2010, №2) На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M . Через эту точку проведён перпендикуляр к прямой CM , который пересекает сторону AD в точке E . Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CE . Найдите угол APB .

12. (2009, №2) Докажите, что существует многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую — в отношении $2 : 1$.

13. (2009, №5) Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120° . Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q , попали на боковые стороны в точки M и N (см. рисунок). Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ .



14. (2008, №3) Пусть AL — биссектриса треугольника ABC , O — центр описанной около этого треугольника окружности, D — такая точка на стороне AC , что $AD = AB$. Докажите, что прямые AO и LD перпендикулярны.

15. (2007, №6) Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами 120° . Докажите, что прямые, симметричные прямым AT , BT и CT относительно прямых BC , CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

16. (2006, №3) Дан остроугольный треугольник ABC . На сторонах AB и BC во внешнюю сторону построены равные прямоугольники $ABMN$ и $LBCK$ так, что $AB = KC$. Докажите, что прямые AL , NK и MC пересекаются в одной точке.