Геометрия на ММО. 8 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Московской математической олимпиаде в 8 классе. В скобках после номера задачи указан год проведения олимпиады, а также порядковый номер задачи в соответствующем варианте (что позволяет составить некоторое представление о сложности задачи).

1. (*2016, №3*) На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

2. (*2016, №5*) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, все стороны которого равны между собой. Известно, что угол A равен $120°$, угол C равен $135°$, а угол D равен $n°$. Найдите все возможные целые значения n.

90

3. (*2015, №2*) Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков AE и BC.

4. (*2015, №5*) В остроугольном треугольнике ABC, в котором $\angle A = 45°$, проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Биссектриса угла BAA_1 пересекает прямую B_1A_1 в точке D, а биссектриса угла CAA_1 пересекает прямую C_1A_1 в точке E. Найдите угол между прямыми BD и CE.

67,5°

5. (*2014, №4*) В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведённых перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

6. (*2013, №2*) Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Точка M — середина стороны AB, точка P — середина отрезка CM, точка N делит сторону BC в отношении $3 : 1$ (считая от вершины B). Докажите, что $AP = MN$.

7. (*2013, №5*) Будем называть точку плоскости *узлом*, если обе её координаты — целые числа. Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то ещё узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

8. (*2012, №4*) В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть точка K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

9. (*2011, №3*) Существует ли шестиугольник, который можно разбить одной прямой на четыре равных треугольника?

Да

10. (*2011, №5*) Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$.

11. (*2010, №3*) В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, точка P лежит на стороне BC. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что $BO = BP$. Найдите отношение $OM : PC$.

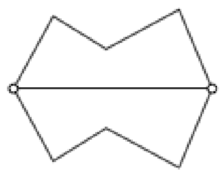
$\boxed{1 : 2}$

12. (*2010, №5*) В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности. Точки M и N — середины сторон BC и AC соответственно. Известно, что угол AIN прямой. Докажите, что угол BIM — также прямой.

13. (*2009, №2*) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

$\boxed{\text{Один из острых углов равен } 36^\circ}$

14. (*2009, №5*) Две точки на плоскости несложно соединить тремя ломаными так, чтобы получилось два равных многоугольника (например, как на рисунке). Соедините две точки четырьмя ломаными так, чтобы все три получившихся многоугольника были равны. (Ломаные несамопересекающиеся и не имеют общих точек, кроме концов.)



15. (*2008, №3*) На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и M соответственно так, что $KM \parallel AC$. Отрезки AM и KC пересекаются в точке O. Известно, что $AK = AO$ и $KM = MC$. Докажите, что $AM = KB$.