Объём и площадь поверхности

Задача 1. (*ММО, 2010, 11*) В квадратной песочнице, засыпанной ровным слоем песка высотой 1, Маша и Паша делали куличи при помощи цилиндрического ведёрка высоты 2. У Маши все куличи удались, а у Паши — рассыпались и превратились в конусы той же высоты. В итоге весь песок ушёл на куличи, поставленные на дне песочницы отдельно друг от друга. Чьих куличей оказалось в песочнице больше: Машиных или Пашиных?

Задача 2. (*Турнир городов, 1999, 10–11*) В море плавает предмет, имеющий форму выпуклого многогранника. Может ли случиться, что 90% его объёма находится ниже уровня воды и при этом больше половины его поверхности находится выше уровня воды?

Задача 3. (*Всеросс., 2010, регион, 11*) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

Задача 4. (*Всеросс., 2007, округ, 11*) Назовем многогранник *хорошим*, если его объём (измеренный в м^3) численно равен площади его поверхности (измеренной в м^2). Можно ли какой-нибудь хороший тетраэдр разместить внутри какого-нибудь хорошего параллелепипеда?

Задача 5. (*Всеросс., 1998, округ, 11*) Даны два правильных тетраэдра с рёбрами длины $\sqrt{2}$, переводящихся один в другой при центральной симметрии. Пусть φ — множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объём фигуры φ.

Задача 6. (*Всеросс. по геометрии, 2007, 10*) Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 1. Из трёх углов при вершине пирамиды два — прямые. Найдите наибольший объём пирамиды.