

Трёхгранные и многогранные углы

ЗАДАЧА 1. Плоские углы трёхгранного угла равны 90° , 90° , α . Найдите его двугранные углы.

06 06

ЗАДАЧА 2. Все плоские углы трёхгранного угла равны 90° . Найдите углы между биссектрисами плоских углов.

09

ЗАДАЧА 3. Все плоские углы трёхгранного угла равны 60° . Найдите углы между его рёбрами и плоскостями противоположных граней.

cos

ЗАДАЧА 4. (*Полярный трёхгранный угол*) Из точки P внутри трёхгранного угла опустим перпендикуляры на плоскости его граней. Полученный новый трёхгранный угол с вершиной P называется *полярным* исходному.

Докажите, что двугранные углы трёхгранного угла и соответствующие плоские углы полярного угла дополняют друг друга до 180° .

Дальнейшие обозначения:

- α, β, γ — плоские углы трёхгранного угла;
- A, B, C — двугранные углы трёхгранного угла, противолежащие плоским углам α, β, γ соответственно (иными словами, двугранный угол A образован плоскостями β и γ ; аналогично B и C).

ЗАДАЧА 5. (*Теорема синусов для трёхгранного угла*) Докажите, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

ЗАДАЧА 6. (*Первая теорема косинусов для трёхгранного угла*) Докажите, что

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

ЗАДАЧА 7. (*Вторая теорема косинусов для трёхгранного угла*) Докажите, что

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha.$$

Указание. Рассмотрите полярный угол и примените к нему первую теорему косинусов.

ЗАДАЧА 8. Докажите, что:

- каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов;
- сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 360° .

ЗАДАЧА 9. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) На плоскости основания конуса с высотой, равной радиусу основания, дана точка (вне конуса), удалённая от окружности основания на расстояние, равное двум радиусам основания. Найдите угол между касательными плоскостями к боковой поверхности конуса, проходящими через данную точку.

$\arctg \frac{2}{\sqrt{5}}$

ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 1997, округ, 11) Существуют ли выпуклая n -угольная ($n \geq 4$) и треугольная пирамиды такие, что четыре трёхгранных угла n -угольной пирамиды равны трёхгранным углам треугольной пирамиды?

ЗАДАЧА 11. (ММО, 1973, 10) У трёхгранного угла проведены биссектрисы плоских углов. Доказать, что попарные углы между биссектрисами либо одновременно тупые, либо одновременно прямые, либо одновременно острые.

ЯГубов.РФ