

Прямые и плоскости

ЗАДАЧА 1. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2011, 10–11*) Прямая a пересекает плоскость α . Известно, что в этой плоскости найдутся 2011 прямых, равноудалённых от a и не пересекающих a . Верно ли, что a перпендикулярна α ?

ЗАДАЧА 2. (*Всеросс., 1999, округ, 10*) В пространстве даны n точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой, никакие четыре не лежат в одной плоскости). Через каждые три из них проведена плоскость. Докажите, что какие бы $n - 3$ точки в пространстве ни взять, найдётся плоскость из проведённых, не содержащая ни одной из этих $n - 3$ точек.

ЗАДАЧА 3. (*Всеросс., 2011, финал, 11*) По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населённых пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населённых пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причём около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.

ЗАДАЧА 4. (*Всеросс. по геометрии, 2010, 10*) Дана прямая ℓ в пространстве и точка A , не лежащая на ней. Для каждой прямой ℓ' , проходящей через A , построим общий перпендикуляр XU (U лежит на ℓ') к прямым ℓ и ℓ' . Найдите геометрическое точек U .

ЗАДАЧА 5. (*Турнир городов, 2000, 10–11*) В пространстве проведено n плоскостей. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите все n , при которых это возможно.

866E или 000Z

ЗАДАЧА 6. (*ММО, 2004, 11*) Верно ли, что для любых четырёх попарно скрещивающихся прямых можно так выбрать по одной точке на каждой из них, чтобы эти точки были вершинами а) трапеции; б) параллелограмма?

ЗАДАЧА 7. (*ММО, 2012, 11*) На плоской горизонтальной площадке стоят пять прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые четыре из этих прожекторов можно повернуть так, что все четыре испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все пять прожекторов, чтобы все пять лучей пересеклись в одной точке?