Треугольник с углом 60°

Треугольник, один из углов которого равен 60°, обладает некоторыми интересными свойствами.

Задача 1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Докажите, что если описанные окружности треугольников ABB_1 и ACC_1 пересекаются в точке, лежащей на стороне BC, то $\angle A = 60^\circ$.

Задача 2. В треугольнике ABC угол C равен 75°, а угол B равен 60°. Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BCM с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC. Найдите угол MAC.

$\boxed{30^\circ}$

Задача 3. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 9*) В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, O — центр описанной окружности, BL — биссектриса. Описанная окружность треугольника BOL пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке D. Докажите, что $BD \perp AC$.

Задача 4. (*Всеросс. по геометрии, 2011*) В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1. Докажите, что прямая B_1C_1 касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

Задача 5. (*Моск. матем. регата, 2013, 8*) На сторонах AB, BC и AC равностороннего треугольника ABC выбраны точки K, M и N соответственно так, что угол MKB равен углу MNC, а угол KMB равен углу KNA. Докажите, что NB — биссектриса угла MNK.

Задача 6. (*Моск. матем. регата, 2013, 10*) В треугольнике ABC угол B равен 60°. Точка D внутри треугольника такова, что $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC$. Найдите наименьшее значение площади треугольника ABC, если $BD = a$.

$\boxed{\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}}$

Задача 7. В треугольнике ABC угол A равен 60°; O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, I — центр вписанной окружности, а I_A — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что $IO = IH$ и $I_AO = I_AH$.

Задача 8. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 8–9*) В треугольнике ABC: $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 45^\circ$. Пусть M — середина BC, H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что прямая MH проходит через середину дуги AB описанной окружности треугольника ABC.

Задача 9. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 8*) В треугольнике ABC отмечены середины сторон AC и BC — точки M и N соответственно. Угол MAN равен 15°, а угол BAN равен 45°. Найдите угол ABM.

$\boxed{75^\circ}$

Задача 10. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) В остроугольном треугольнике ABC угол C равен 60°. H — точка пересечения высот этого треугольника. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает прямые CA и CB в точках M и N соответственно. Докажите, что AN и BM параллельны (или совпадают).

Задача 11. (*Турнир городов, 2017, 8–9*) Из вершины A остроугольного треугольника ABC по биссектрисе угла A выпустили бильярдный шарик, который отразился от стороны BC по закону «угол падения равен углу отражения» и дальше катился по прямой, уже ни от чего не отражаясь. Докажите, что если $\angle A = 60^\circ$, то траектория шарика проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

Задача 12. (*Всеросс., 2010, регион, 9.4*) В треугольнике ABC угол A равен 60°. Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1, лежит на стороне BC.

Задача 13. В остроугольном треугольнике ABC с углом A, равным 60°, высоты пересекаются в точке H.

а) Пусть M и N — точки пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BH и CH со сторонами AB и AC соответственно. Докажите, что точки M, N и H лежат на одной прямой.

б) Докажите, что на той же прямой лежит центр O описанной окружности.