

## Прямая Симсона

**ЗАДАЧА 1.** (*Прямая Симсона*) Из точки  $P$ , расположенной на описанной окружности треугольника  $ABC$ , опустили перпендикуляры на прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ . Докажите, что основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой.

**ЗАДАЧА 2.** (*Всеросс. по геометрии, 2014*) Дан прямоугольник  $ABCD$ . Через точку  $B$  провели две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сторону  $AD$  в точке  $K$ , а вторая — продолжение стороны  $CD$  в точке  $L$ . Пусть  $F$  — точка пересечения  $KL$  и  $AC$ . Докажите, что  $BF \perp KL$ .

**ЗАДАЧА 3.** Основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , лежат на одной прямой. Докажите, что точка  $P$  принадлежит описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**ЗАДАЧА 4.** Точка  $D$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что точка  $A$  и центры окружностей, описанных около треугольников  $ABC$ ,  $ABD$  и  $ACD$ , лежат на одной окружности.

**ЗАДАЧА 5.** (*Теорема Птолемея*) Докажите, что для вписанного четырёхугольника  $ABCD$  справедливо равенство  $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ .

**ЗАДАЧА 6.** Хорда  $PQ$  описанной окружности треугольника  $ABC$  перпендикулярна стороне  $BC$ . Докажите, что прямая  $AQ$  параллельна прямой Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ .

**ЗАДАЧА 7.** Точка  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ ; точка  $P$  лежит на описанной окружности этого треугольника. Докажите, что прямая Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  проходит через середину отрезка  $PH$ .

**ЗАДАЧА 8.** (*Всеросс. по геометрии, 2012*) Дан треугольник  $ABC$ . Рассматриваются прямые  $l$ , обладающие следующим свойством: три прямые, симметричные  $l$  относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

**ЗАДАЧА 9.** (*Всеросс. по геометрии, 2009*) Дан треугольник  $ABC$  и точки  $X$ ,  $Y$ , не лежащие на его описанной окружности  $\Omega$ . Пусть  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — проекции  $X$  на  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , а  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  — проекции  $Y$ . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  на соответственно  $B_2C_2$ ,  $C_2A_2$ ,  $A_2B_2$ , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямая  $XY$  проходит через центр  $\Omega$ .

**ЗАДАЧА 10.** (*Всеросс. по геометрии, 2014, финал, 10*) Дан фиксированный треугольник  $ABC$ . Пусть  $D$  — произвольная точка в плоскости треугольника, не совпадающая с его вершинами. Окружность с центром в  $D$ , проходящая через  $A$ , пересекает вторично прямые  $AB$  и  $AC$  в точках  $A_b$  и  $A_c$  соответственно. Аналогично определяются точки  $B_a$ ,  $B_c$ ,  $C_a$  и  $C_b$ . Точку  $D$  назовём *хорошой*, если точки  $A_b$ ,  $A_c$ ,  $B_a$ ,  $B_c$ ,  $C_a$  и  $C_b$  лежат на одной окружности. Сколько может оказаться точек, хороших для данного треугольника  $ABC$ ?

Либо, либо и то и другое