

## Педальный треугольник

Рассмотрим треугольник  $ABC$  и точку  $P$ . Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. Треугольник  $A_1B_1C_1$  называется *педальным треугольником* точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ .

Рассматриваем также точки  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$ , в которых прямые  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  (соответственно) вторично пересекают описанную окружность треугольника  $ABC$ .

Удобно пользоваться обозначениями:  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ ;  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  — стороны педального треугольника;  $a_p$ ,  $b_p$ ,  $c_p$  — стороны треугольника  $A_pB_pC_p$ ;  $x_a = PA$ ,  $x_b = PB$ ,  $x_c = PC$  и  $y_a = PA_p$ ,  $y_b = PB_p$ ,  $y_c = PC_p$ .

ЗАДАЧА 1. Докажите, что

$$a_1 = \frac{ax_a}{2R}, \quad b_1 = \frac{bx_b}{2R}, \quad c_1 = \frac{cx_c}{2R},$$

где  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ .

ЗАДАЧА 2. Докажите, что  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_pB_pC_p$ .

ЗАДАЧА 3. Опустив из точки  $P$  перпендикуляры на стороны педального треугольника, получим *второй педальный треугольник*; повторив это, получим *третий педальный треугольник*. Докажите, что третий педальный треугольник подобен треугольнику  $ABC$ .

ЗАДАЧА 4. (*Теорема Эйлера для педального треугольника*) Пусть  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ , а  $S_1$  — площадь педального треугольника точки  $P$  относительно  $\triangle ABC$ . Докажите, что

$$S_1 = \frac{1}{4} \left| 1 - \frac{d^2}{R^2} \right| S,$$

где  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ , а  $d$  — расстояние от точки  $P$  до центра этой окружности.

*Следствие.* Педальный треугольник точки  $P$  относительно  $\triangle ABC$  является вырожденным тогда и только тогда, когда точка  $P$  лежит на описанной окружности  $\triangle ABC$ . (Вершины вырожденного педального треугольника расположены на *прямой Симсона*.)

ЗАДАЧА 5. Пусть прямая  $\ell_A$  проходит через середины отрезков  $PA$  и  $B_1C_1$ . Аналогично определяются прямые  $\ell_B$  и  $\ell_C$ . Докажите, что прямые  $\ell_A$ ,  $\ell_B$  и  $\ell_C$  пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА 6. *Педальная окружность* — это окружность, описанная около педального треугольника. Пусть точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены относительно треугольника  $ABC$ . Докажите, что их педальные окружности совпадают. Докажите также, что стороны педального треугольника точки  $P$  перпендикулярны прямым  $QA$ ,  $QB$ ,  $QC$ .

ЗАДАЧА 7. Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что педальная окружность точки  $D$  относительно треугольника  $ABC$  проходит через точку  $O$ .

ЗАДАЧА 8. (*Турнир городов, 1996, 8–9*) Докажите, что внутри остроугольного треугольника существует такая точка, что основания перпендикуляров, опущенных из неё на стороны, являются вершинами равностороннего треугольника.

ЗАДАЧА 9. (*Всеросс. по геометрии, 2011*) Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Найдите на сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  такие точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , чтобы наибольшая сторона треугольника  $A'B'C'$  была минимальна.

ЗАДАЧА 10. (*Всеросс. по геометрии, 2013, 9.4*) Дан треугольник  $ABC$  и такая точка  $F$ , что  $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$ . Прямая, проходящая через  $F$  и перпендикулярная  $BC$ , пересекает медиану, проведённую из вершины  $A$ , в точке  $A_1$ . Точки  $B_1$  и  $C_1$  определяются аналогично. Докажите, что  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  являются тремя вершинами правильного шестиугольника, три другие вершины которого лежат на сторонах треугольника  $ABC$ .

ЗАДАЧА 11. (*Теорема Штейнера*) Даны два треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Перпендикуляры, опущенные из точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на прямые  $B'C'$ ,  $C'A'$ ,  $A'B'$  пересекаются в одной точке. Докажите, что тогда перпендикуляры, опущенные из точек  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  на прямые  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , тоже пересекаются в одной точке.

ЯГубов.РФ