Окружность девяти точек и прямая Эйлера

В треугольнике ABC обозначим:

M_A, M_B, M_C — середины сторон BC, AC, AB соответственно;
AH_A, BH_B, CH_C — высоты, H — ортоцентр;
T_A, T_B, T_C — середины отрезков AH, BH, CH соответственно;

Теорема. (*Окружность девяти точек*) Точки M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C, T_A, T_B, T_C лежат на одной окружности.

Первое доказательство теоремы

Задача 1. Докажите, что $\triangle M_AM_BM_C = \triangle T_AT_BT_C$.

Задача 2. Докажите, что $M_AM_BT_AT_B$, $M_BM_CT_BT_C$ и $M_CM_AT_CT_A$ — прямоугольники.

Задача 3. Докажите, что точки M_A, M_B, M_C, T_A, T_B, T_C лежат на одной окружности.

Задача 4. Докажите Теорему.

Задача 5. (*«Высшая проба», 2013, 9*) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. На стороне AB выбрана точка P так, что окружность, описанная вокруг треугольника PA_1B_1, касается стороны AB. Найдите PC_1, если $PA = 30$ и $PB = 10$.

9

Второе доказательство теоремы (лемма о трезубце)

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и окружность ω, описанную вокруг его ортотреугольника.

Задача 6. С помощью леммы о трезубце докажите, что точки T_A, T_B, T_C расположены на окружности ω.

Задача 7. С помощью внешней леммы о трезубце докажите, что точки M_A, M_B, M_C расположены на окружности ω.

Задача 8. Проведите аналогичные рассуждения для тупоугольного треугольника ABC.

Прямая Эйлера

Задача 9. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что

$$AH = 2 \cdot OM_A, \quad BH = 2 \cdot OM_B, \quad CH = 2 \cdot OM_C.$$

Указание. Рассмотрите треугольник, для которого $\triangle ABC$ является *серединным*.

Задача 10. Пусть X — точка пересечения AM_A и OH. Покажите, что X совпадает с центроидом (точкой пересечения медиан) треугольника ABC.

Таким образом, *ортоцентр, центр описанной окружности и центроид треугольника лежат на одной прямой*. Эта прямая называется *прямой Эйлера*.

Задача 11. Покажите, что центр окружности девяти точек является серединой отрезка OH.

Теперь нетрудно заключить, что окружность девяти точек данного треугольника переходит в описанную окружность этого треугольника:

- при гомотетии относительно центроида с коэффициентом -2;
- при гомотетии относительно ортоцентра коэффициентом 2.

Эти факты полезно иметь в виду при решении задач.

Задача 12. (*Всеросс., 2015, финал, 9*) Остроугольный треугольник ABC ($AB < AC$) вписан в окружность Ω. Пусть M — точка пересечения его медиан, а AH — высота этого треугольника. Луч MH пересекает Ω в точке A'. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A'HB$, касается AB.