

## Точка Микеля

**ЗАДАЧА 1.** Прямая пересекает стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  (или их продолжения) в точках  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  соответственно.

- а) Докажите, что описанные окружности треугольников  $ABC$ ,  $A_1B_1C$ ,  $A_1BC_1$  и  $AB_1C_1$  проходят через одну точку (*точка Микеля*).
- б) Докажите, что центры четырёх указанных окружностей и точка Микеля расположены на одной окружности.

**ЗАДАЧА 2.** На плоскости расположены равные отрезки  $AB$  и  $CD$ . Пусть лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $E$ , а отрезки  $AC$  и  $BD$  — в точке  $F$ .

- а) Очевидно, что отрезки  $AB$  и  $CD$  совмещаются поворотом, переводящим  $A$  в  $C$  и  $B$  в  $D$ . Где находится центр  $O$  этого поворота?
- б) При каком условии точка  $O$  лежит на отрезке  $AD$ ?

(6) Точки  $B$ ,  $E$ ,  $C$ ,  $F$  лежат на одной окружности

**ЗАДАЧА 3.** Дан вписанный четырёхугольник  $ABCD$ . Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $E$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  — в точке  $F$ . Известно, что  $BE = DF$ . Докажите, что  $CE = CF$ .

**ЗАДАЧА 4. (IMO, 2005)** Let  $ABCD$  be a fixed convex quadrilateral with  $BC = DA$  and  $BC$  not parallel with  $DA$ . Let two variable points  $E$  and  $F$  lie on the sides  $BC$  and  $DA$  respectively and satisfy  $BE = DF$ . The lines  $AC$  and  $BD$  meet at  $P$ , the lines  $BD$  and  $EF$  meet at  $Q$ , the lines  $EF$  and  $AC$  meet at  $R$ . Prove that the circumcircles of the triangles  $PQR$ , as  $E$  and  $F$  vary, have a common point other than  $P$ .

**ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 2014, финал, 10–11)** Треугольник  $ABC$  ( $AB > BC$ ) вписан в окружность  $\Omega$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AM = CN$ . Прямые  $MN$  и  $AC$  пересекаются в точке  $K$ . Пусть  $P$  — центр вписанной окружности треугольника  $AMK$ , а  $Q$  — центр вневписанной окружности треугольника  $CNK$ , касающейся стороны  $CN$ . Докажите, что середина дуги  $ABC$  окружности  $\Omega$  равноудалена от точек  $P$  и  $Q$ .

**ЗАДАЧА 6.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$ , имеют общую точку.

**ЗАДАЧА 7. (MMO, 2007, 11)** Точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  — середины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно, а  $BH$  — его высота. Докажите, что если описанные около треугольников  $AHC'$  и  $CHA'$  окружности проходят через точку  $M$ , отличную от  $H$ , то  $\angle ABM = \angle CBB'$ .