Медианы, высоты, биссектрисы

Задача 1. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 8–9*) В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане CL. Докажите, что в треугольнике BKL также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

Задача 2. (*Турнир городов, 2014, 8–9*) В треугольнике ABC угол C — прямой. На катете CB как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка N — середина этой полуокружности. Докажите, что прямая AN делит пополам биссектрису угла C.

Задача 3. (*Турнир городов, 2010, 8–9*) На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

Задача 4. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) На листе бумаги синим карандашом нарисовали треугольник, а затем провели в нём красным карандашом медиану, биссектрису и высоту (возможно, не все из разных вершин), лежащие внутри треугольника. Получили разбиение треугольника на части. Мог ли среди этих частей оказаться равносторонний треугольник с красными сторонами?

Задача 5. (*MMO, 2016, 8*) На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60°$. Докажите, что $AC = BK$.

Задача 6. (*Олимпиада им. Эйлера, 2016, регион*) Точки M и N — середины биссектрис AK и CL треугольника ABC соответственно. Докажите, что угол ABC прямой тогда и только тогда, когда $\angle MBN = 45°$.

Задача 7. (*MMO, 2016, 9*) В треугольнике ABC на продолжении медианы CM за точку C отметили точку K так, что $AM = CK$. Известно, что угол BMC равен $60°$. Докажите, что $AC = BK$.

Задача 8. (*MMO, 2015, 10*) Дан треугольник ABC. Проведены высота AH и медиана CM. Обозначим точку их пересечения через P. Высота, проведённая из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM, в точке Q. Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.

ЛГУ.ОВ.РФ