

Параметр как переменная

В некоторых задачах бывает полезно воспринять параметр как отдельную переменную и решать данное уравнение или неравенство относительно параметра.

Задача 1. (ОММО, 2013) При каких значениях параметра a уравнение $2x^4 + 9ax + 7a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

Решение. Ключевая идея здесь состоит в том, чтобы поменять ролями буквы x и a : переменную x сделать параметром, а параметр a — переменной. Тогда уравнение получается квадратным относительно a , и вопрос формулируется так: определить, при каких целых значениях параметра x уравнение

$$7a^2 + 9ax + 2x^4 = 0 \quad (1)$$

имеет корни, и найти эти корни. Вычисляем дискриминант:

$$D = 81x^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2x^4 = x^2 (81 - 56x^2).$$

Как видим, дискриминант неотрицателен лишь при трёх целочисленных значениях x , равных 0 и ± 1 . Если $x = 0$, то уравнение (1) даёт $a = 0$. Если $x = 1$, то получаем уравнение $7a^2 + 9a + 2 = 0$, откуда $a = -1$ или $a = -2/7$. Наконец, если $x = -1$, то уравнение (1) принимает вид $7a^2 - 9a + 2 = 0$, откуда $a = 1$ или $a = 2/7$.

Ответ: $0; \pm 1; \pm \frac{2}{7}$.

Задача 2. Найти все a , при которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$$

выполнено при всех x , удовлетворяющих условию $1 \leq x \leq 2$.

Решение. В предыдущем листке «Параметры. Рациональные уравнения и неравенства» эта задача была решена с помощью обычного метода интервалов.

А теперь давайте поменяем ролями x и a : воспримем a как переменную, а x — как параметр. Перепишем наше неравенство следующим образом:

$$\frac{a - \frac{x-1}{2}}{a - x} < 0, \quad (2)$$

и будем решать неравенство (2) относительно a .

Ясно, что при $x \in [1; 2]$ имеем $\frac{x-1}{2} < x$, поэтому множество решений неравенства (2) есть

$$\frac{x-1}{2} < a < x. \quad (3)$$

Когда x меняется от 1 до 2, величина $\frac{x-1}{2}$ меняется от 0 до $\frac{1}{2}$. Чтобы найти множество A всех значений a , удовлетворяющих условию (3) **при всех** $x \in [1; 2]$, нужно взять пересечение всех интервалов $(\frac{x-1}{2}; x)$ при x пробегающем значения от 1 до 2. Получим:

$$A = \bigcap_{x \in [1; 2]} \left(\frac{x-1}{2}; x \right) = \left(\frac{1}{2}; 1 \right).$$

Ответ: $a \in (\frac{1}{2}; 1)$.

Задача 3. (МГУ, мехмат, 1992) Найти все x , при которых неравенство

$$(a+2)x^3 - (1+2a)x^2 - 6x + a^2 + 4a - 5 > 0$$

выполняется хотя бы для одного $a \in [-2; 1]$.

Решение. Данное неравенство, будучи кубическим относительно x , является квадратным по a . Поэтому давайте перепишем его следующим образом:

$$a^2 + (x^3 - 2x^2 + 4)a + 2x^3 - x^2 - 6x - 5 > 0.$$

Обозначим

$$f(a) = a^2 + (x^3 - 2x^2 + 4)a + 2x^3 - x^2 - 6x - 5,$$

где x играет роль параметра. Нам нужно выяснить, при каких x функция $f(a)$ принимает положительное значение хотя бы в одной точке отрезка $[-2; 1]$.

Эти искомые значения x мы назовём *хорошими*. Назовём *плохими* все остальные x ; иными словами, плохими являются все те значения x , при которых выполнено

$$f(a) \leq 0 \text{ для любого } a \in [-2; 1]. \quad (4)$$

В нашей задаче проще искать плохие значения x (а потом найти хорошие как дополнения плохих до множества $\mathbb{R}$). Дело в том, что множество плохих x описывается очень просто. Поскольку коэффициент перед a^2 у функции $f(a)$ положителен, для выполнения условия (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств

$$\begin{cases} f(-2) \leq 0, \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

(см. листок «[Параметры и квадратный трёхчлен. 2](#)»).

Имеем:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3), \\ f(1) &= 3x^3 - 3x^2 - 6x = 3x(x+1)(x-2), \end{aligned}$$

так что система (5) принимает вид:

$$\begin{cases} (x+1)(x-3) \leq 0, \\ x(x+1)(x-2) \leq 0. \end{cases}$$

Решения данной системы легко находим методом интервалов:

$$x = -1, \quad 0 \leq x \leq 2. \quad (6)$$

Это и есть множество плохих значений x . Искомое множество хороших значений x есть дополнение до $\mathbb{R}$ множества (6):

$$x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad x > 2.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

Задачи

1. Найти все a , при которых неравенство

$$\frac{4x - a}{x - 2a} < 0$$

выполнено при всех x , удовлетворяющих условию $2 \leq x \leq 4$.

$(8; \frac{1}{2}) \ni v$

2. Найти все a , при которых неравенство

$$\frac{x + 3a - 5}{x + a} \geq 0$$

выполнено при всех x , удовлетворяющих условию $1 \leq x \leq 4$.

$(\infty + ; \frac{5}{7}] \cap (\frac{1}{2} - ; \infty -) \ni v$

3. (МГУ, физический. ф-т, 1997) Найдите все $a > 0$, при которых неравенство

$$\frac{x - 3a - 1}{x + 2a - 2} \leq 0$$

выполняется для всех x из промежутка $2 \leq x \leq 3$.

$(\infty + ; \frac{5}{2}] \cap (\frac{2}{1} - ; \infty -) \ni v$

4. (МГУ, геологич. ф-т, 2002) Найдите все $a > 0$, при которых неравенство

$$\frac{a + 2x}{ax - 4} \geq \frac{5}{x}$$

выполнено для всех $x > 10$.

$[\frac{2}{11}; \frac{5}{2}] \ni v$

5. (МГУ, филологич. ф-т, 1980) Найдите все $a \leq -4$, при которых уравнение

$$x^2 + ax - 3x - 2a = 2$$

имеет наименьший корень.

$\frac{1}{2} - = v$

6. (МГУ, ф-т почвоведения, 1988) Найдите наибольший корень уравнения

$$x^2 + (3ab + 3a - 2)x + 5ab + 5a = 17$$

при $a \geq 1, b \geq 0$.

$\frac{1}{2}$

7. (ОММО, 2013) При каких значениях параметра a уравнение $5x^4 + 7ax + 2a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

$\frac{2}{3} \neq 1 \neq 0$

8. (МГУ, ИСАА, 2000) Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$|x^2 + 4x - a| > 6$$

не имеет решений на отрезке $[-3; 0]$.

$$[\overline{z}; 9-] \ni v$$

9. (МГУ, биологич. ф-т, 1994) Найдите все такие значения x , при которых неравенство

$$(4 - 2a)x^2 + (13a - 27)x + 33 - 13a > 0$$

выполняется для всех a , удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

$$[9^{\wedge} + \varepsilon; \overline{z}] \cap [\overline{z}; 9^{\wedge} - \varepsilon] \ni x$$

10. (МГУ, химический ф-т, 1987) Найдите все значения параметра p , при каждом из которых множество решений неравенства

$$(p - x^2)(p + x - 2) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

$$(\infty + ; \varepsilon] \cap [0; \infty -) \ni d$$

11. (МГУ, ф-т почвоведения, 1993) Найдите все значения a , при которых неравенство

$$x + \frac{7a^2 + a - 2}{x + a + 1} < 7a - 1$$

не имеет положительных решений.

$$[\frac{z}{1} - ; 1-] \ni v$$

12. (МГУ, мехмат, 1992) Найдите все значения x , удовлетворяющие неравенству

$$(2 - a)x^3 + (1 - 2a)x^2 - 6x + 5 + 4a - a^2 < 0$$

хотя бы при одном значении a , принадлежащем отрезку $[-1; 2]$.

$$(\infty + ; \overline{z}) \cap (0; 1-) \cap (1-; \infty -) \ni x$$

13. (МГУ, ф-т почвоведения, 1992) Найдите все значения a , при которых неравенство

$$2ax + 2\sqrt{2x + 3} - 2x + 3a - 5 < 0$$

выполняется при всех $x \in [-1; 3]$.

$$\frac{z}{1} > v$$

14. (МГУ, мехмат, 1989) Найти наименьшее x , при котором существуют y, z , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

$$\frac{z}{1} \wedge -$$

15. (МГУ, биологический ф-т, 1999) Найти все $x > \frac{1}{2}$, при которых неравенство

$$4x^3y^2 - 6x^3y - 10x^2y^2 - 16x^3 + 11x^2y + 8xy^2 + 50x^2 - 4xy - 2y^2 - 52x - y + 18 < 0$$

выполняется для всех $y \in (1; 2x)$.

$$\left[\frac{7}{8}; 1\right) \cap \left(1; \frac{9}{8}\right] \ni x$$

16. (МГУ, МШЭ, 2007) При каких значениях параметра b уравнение

$$81^x - 2 \cdot 3^{3x+1} + 8 \cdot 9^x + (6b - 12) \cdot 3^{x-1} - b^2 + 4b - 4 = 0$$

имеет три различных корня?

$$(9; 5) \cap (5; 7) \cap (7; 1) \ni q$$