

Параметры. Рациональные уравнения и неравенства

Напомним, что *рациональной функцией* называется отношение двух многочленов. Уравнение или неравенство называется *рациональным*, если в нём рациональная функция сравнивается с нулём (или с другой рациональной функцией).

При решении рациональных уравнений нужно считаться с тем, что знаменатели дробей могут обращаться в нуль. Рациональные неравенства решаются [методом интервалов](#).

Задача 1. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$\frac{x - a}{x^2 - 3x + 2} = 0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x - a = 0, \\ x^2 - 3x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \\ x \neq 1, 2. \end{cases}$$

Ответ: Если $a \neq 1, 2$, то $x = a$; если $a = 1$ или $a = 2$, то решений нет.

Задача 2. При каких a уравнение

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x - 2} = 0$$

имеет единственный корень?

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Данная система будет иметь единственное решение в одном из двух случаев:

- 1) уравнение системы имеет единственный корень, не равный 2;
- 2) уравнение системы имеет два корня, один из которых равен 2.

Первый случай отвечает нулевому дискриминанту: $D = a^2 - 4 = 0$, то есть $a = \pm 2$. Если $a = 2$, то уравнение системы имеет корень $x = -1$; аналогично, если $a = -2$, то $x = 1$. В обоих случаях имеем $x \neq 2$, так что значения $a = \pm 2$ подходят.

Во втором случае давайте просто подставим $x = 2$ в уравнение системы: $4 + 2a + 1 = 0$, откуда $a = -\frac{5}{2}$. Тем самым мы нашли (единственное) значение a , при котором уравнение системы имеет корень $x = 2$. При данном a уравнение системы принимает вид $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$, и второй его корень $x = \frac{1}{2}$. Это значение x и будет единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $a = \pm 2, -\frac{5}{2}$.

Задача 3. (МГУ, химический ф-т, 2003) Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$\frac{a}{x - a} > 0$$

содержит точку $x = 1$.

Решение. Если $a = 0$, то данное неравенство принимает вид $\frac{0}{x} > 0$ и решений не имеет.

Если $a > 0$, то множество решений неравенства есть $x > a$. Это множество содержит точку $x = 1$ при $a < 1$. Итак, в данном случае имеем подходящие a : $0 < a < 1$.

Если $a < 0$, то множество решений неравенства есть $x < a$. Это множество состоит из отрицательных чисел и не может содержать точку $x = 1$. Поэтому никакое $a < 0$ не годится.

Ответ: $a \in (0; 1)$.

Задача 4. Найти все a , при которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$$

выполнено при всех x , удовлетворяющих условию $1 \leq x \leq 2$.

Решение. Методом интервалов легко устанавливаем, что решения данного неравенства расположены между точками a и $2a + 1$. Точнее, имеем три случая — в зависимости от того, какое из чисел (a или $2a + 1$) больше.

1. При $a < -1$ имеем $2a + 1 < a$, так что множество решений неравенства есть $2a + 1 < x < a$. Это множество состоит только из отрицательных чисел и потому не может содержать отрезок $[1; 2]$. Следовательно, в рассматриваемом случае подходящих значений a нет.
2. Если $a = -1$, то неравенство не имеет решений. Это значение a не годится.
3. При $a > -1$ имеем $a < 2a + 1$, так что множество решений неравенства есть $a < x < 2a + 1$. Отрезок $[1; 2]$ будет содержаться в этом множестве при выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} a < 1, \\ 2 < 2a + 1, \end{cases}$$

то есть при $\frac{1}{2} < a < 2$. Все эти a удовлетворяют неравенству $a > -1$ и, следовательно, подходят.

Ответ: $a \in (\frac{1}{2}; 2)$.

В следующем листке «[Параметр как переменная](#)» мы рассмотрим другой способ решения этой задачи, в котором параметр a играет роль отдельной переменной.

Задачи

1. При всех a решить уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - a} = 0.$$

Если $a \neq 1, 3$, то $x = 1$ и $x = 3$; если $a = 1$, то $x = 3$; если $a = 3$, то $x = 1$

2. При всех a решить уравнение

$$\frac{a(x - a)}{x - 2} = 0.$$

Если $a \neq 0, 2$, то $x = a$; если $a = 0$, то $x \neq 2$; если $a = 2$, то решений нет

3. При всех a решить уравнение

$$\frac{a(x - 2)}{x - a} = 0.$$

Если $a \neq 0, 2$, то $x = 2$; если $a = 0$, то $x \neq 2$; если $a = 2$, то решений нет

4. Найти все a , при которых неравенство

$$\frac{4x - a}{x - 2a} < 0$$

выполнено при всех x , удовлетворяющих условию $2 \leq x \leq 4$.

$$(8; 2) \ni v$$

5. Найти все a , при которых неравенство

$$\frac{x + 3a - 5}{x + a} \geq 0$$

выполнено при всех x , удовлетворяющих условию $1 \leq x \leq 4$.

$$(\infty + \frac{8}{7}] \cap (4 - \infty -) \ni v$$

6. (МГУ, социологич. ф-т, 2005) При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{(a + 4)x^2 + 6x - 1}{x + 3} = 0$$

имеет единственное решение?

$$\{\frac{6}{17} - 4; 13\} \ni v$$

7. (МГУ, химический ф-т, 2003) Найдите все значения параметра b , при которых множество решений неравенства

$$\frac{b}{x + b} < 0$$

содержит точку $x = 2$.

$$(0; 2 -) \ni q$$

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2006) При всех значениях a решите уравнение

$$3^{\frac{ax+2}{x^2+2}} + 3^{\frac{3x^2-ax+4}{x^2+2}} = 12.$$

$$\text{Если } a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty), \text{ то } x = 0, a, \frac{4}{91-2\sqrt{a \pm a}}; \text{ если } a \in (-4; 4), \text{ то } x = 0$$

9. (МГУ, ф-т почвоведения, 2002) Найдите все a , при которых уравнение

$$\frac{(x^3 - 1)(x^2 - 16)}{\lg(15a - x) - \lg(x - a)} = 0$$

имеет единственный корень.

$$(\frac{15}{16}; \frac{8}{1}) \cap (\frac{8}{1}; \frac{8}{1}) \cap (\frac{8}{1}; \frac{15}{16}) \ni v$$

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2003) Найдите все значения параметра b , при каждом из которых отрезок $[-3; -1]$ целиком содержится среди решений неравенства

$$\frac{x - 3b}{b - 2x} < 0.$$

$$(\infty+; \frac{5}{1}-) \cap (9-; \infty-) \ni q$$

11. (МГУ, физический ф-т, 2003) Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 2^{|2a-1|} - 2x + 1}{x^2 - (a-2)x - 2a} > 0.$$

$$(\infty+; 1) \cap (1; \frac{2}{1}) \cap (2-; \infty-) \ni x \text{ ол } \frac{2}{1} = v \text{ илсэ}$$

$$(\infty+; v) \cap (2-; \infty-) \ni x \text{ ол } (\infty+; \frac{2}{1}) \cap (\frac{2}{1}; 2-) \ni v \text{ илсэ } (\infty+; \infty) \ni x \text{ ол } a \in (-2; \infty) \cap (a; \infty) \ni x \text{ ол } a \geq -2 \text{ илсэ}$$

12. (МГУ, химический ф-т, 1999) При каждом $a \in [-1; 0]$ решить неравенство

$$\log_{x+a} (x^2 - (a+1)x + a) \geq 1.$$

$$2 \leq x \text{ ол } 0 = v \text{ илсэ } (\infty+; 2+v] \cap (v-1; 1) \ni x \text{ ол } (0; \frac{2}{1}-) \ni v \text{ илсэ}$$

$$(\infty+; \frac{2}{8}) \cap (\frac{2}{8}; 1) \ni x \text{ ол } \frac{2}{1} = v \text{ илсэ } (\infty+; a-1) \cap [2+v; 1) \ni x \text{ ол } (\frac{2}{1}-; 1-) \ni v \text{ илсэ } 2 < x \text{ ол } -1 = v \text{ илсэ}$$

13. (МГУ, мехмат, 1999) Найти все a , при которых множество решений неравенства

$$\frac{a + 2 - 2^{x-2}}{a + 3} \geq \frac{5a + 5}{2(2^x + 3a + 3)}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

$$(\infty+; 3] \cap \{1-\} \cap (3-; \infty-) \ni v$$

14. (МГУ, мехмат, 1999) Найти все a , при которых сумма длин интервалов, составляющих множество решений неравенства

$$\frac{x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3} < 0$$

не меньше 1.

$$(\infty+; 4] \cap [8; \infty-) \ni v$$