Параметры и квадратный трёхчлен. 1

Мы начинаем с рассмотрения уравнений вида

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Если $a \neq 0$, то уравнение (1) является *квадратным*. Не забываем, однако, что параметр a «никому ничем не обязан» и может равняться нулю (и тогда уравнение перестаёт быть квадратным). Случай $a = 0$ при необходимости следует рассматривать отдельно.

Напомним известные вам факты теории. Пусть уравнение (1) является квадратным, то есть $a \neq 0$. Тогда *дискриминант* этого уравнения есть величина $D = b^2 - 4ac$. Возможны три случая.

1. Если $D > 0$, то уравнение (1) имеет ровно два различных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,.$$

2. Если $D = 0$, то уравнение (1) имеет единственный корень

$$x = -\frac{b}{2a}\,.$$

3. Если $D < 0$, то уравнение (1) не имеет корней.

Для квадратного уравнения вида

$$ax^2 + 2kx + b = 0$$

удобно использовать дискриминант

$$D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac.$$

Тогда формула корней выглядит так:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}\,.$$

Если уравнение (1) имеет два различных корня x_1 и x_2, то его левая часть раскладывается на множители следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если уравнение (1) имеет единственный корень x_0, то его левая часть является полным квадратом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2, то справедливы формулы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}\,, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}\,. \end{cases}$$

Эти же формулы имеют место и в случае единственного корня x_1, если положить $x_2 = x_1$.

Задача 1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Определите, сколько существует различных значений a, при которых уравнение

$$\left(1 - a^2\right) x^2 + ax + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Эта простая задача отборочного тура содержит маленький подвох: надо не забыть рассмотреть отдельно значения $a = \pm 1$, при которых уравнение окажется не квадратным, а линейным. Так, при $a = 1$ уравнение принимает вид $x + 1 = 0$ и имеет единственный корень $x = -1$; аналогично, при $a = -1$ уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Если же $a \neq \pm 1$, то наше уравнение — квадратное с дискриминантом

$$D = a^2 - 4(1 - a^2) = 5a^2 - 4.$$

Корень будет единственным в том и только в том случае, если $D = 0$, то есть при $a = \pm 2/\sqrt{5}$. Всего, стало быть, получается четыре значения a.

Ответ: Четыре.

Задача 2. При всех a решить уравнение $x^2 + ax + 9 = 0$.

Решение. Находим дискриминант:

$$D = a^2 - 36 = (a - 6)(a + 6).$$

Методом интервалов определяем знаки дискриминанта:

Соответственно, рассматриваем следующие случаи. Если $a < -6$ или $a > 6$, то уравнение имеет два корня:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 36}}{2}. \tag{2}$$

Если $a = -6$, то корень один, и он легко получается из формулы (2): $x = 3$. Аналогично, если $a = 6$, то $x = -3$. Наконец, если $-6 < a < 6$, то уравнение не имеет решений.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$, то $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-36}}{2}$; если $a = -6$, то $x = 3$; если $a = 6$, то $x = -3$; если $a \in (-6; 6)$, то решений нет.

Можно дать ответ в более сжатом виде, если «пристыковать» случаи $a = \pm 6$ к первому случаю.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$, то $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-36}}{2}$; если $a \in (-6; 6)$, то решений нет.

В каком именно виде записывать ответ — дело вашего вкуса. Мы обычно будем предпочитать второй вариант.

Задача 3. При всех a решить уравнение $ax^2 + x + 1 = 0$.

Решение. Здесь тоже хочется сразу написать дискриминант, но давайте всё же заметим, что возможно $a = 0$, и тогда уравнение не будет квадратным (так что ни о каком дискриминанте говорить не придётся). Этот случай надо рассмотреть отдельно.

Пусть $a = 0$. Тогда уравнение примет вид $x + 1 = 0$, откуда $x = -1$.

Пусть теперь $a \neq 0$. Тогда уравнение является квадратным, и его дискриминант $D = 1 - 4a$. При $a \leqslant \frac{1}{4}$ дискриминант неотрицателен, поэтому

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2a}\,.$$

Если же $a > \frac{1}{4}$, то $D < 0$ и уравнение не имеет корней.

Ответ: Если $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{4}\right]$, то $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}$; если $a = 0$, то $x = -1$; если $a \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$, то решений нет.

Задача 4. Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения

$$x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$$

в два раза больше другого.

Решение. Прежде всего, уравнение должно иметь два различных корня, поэтому его дискриминант положителен:

$$D = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + 2) = 4a - 7 > 0,$$

откуда

$$a > \frac{7}{4}\,. \tag{3}$$

Пусть корни нашего уравнения равны t и $2t$. По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} t + 2t = 2a + 1, \\ t \cdot 2t = a^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 2a + 1, \\ 2t^2 = a^2 + 2. \end{cases}$$

Выразим t из первого уравнения, подставим во второе и после простых преобразований получим:

$$a^2 - 8a + 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; (a - 4)^2 = 0,$$

то есть $a = 4$. Это значение a удовлетворяет неравенству (3) и потому годится.

Ответ: $a = 4$.

Задача 5. При каких значениях a сумма квадратов двух различных корней уравнения

$$x^2 - 4ax + 5a = 0$$

равна 6?

Решение. Уравнение имеет два различных корня, поэтому дискриминант положителен:

$$D_1 = (2a)^2 - 5a = a(4a - 5) > 0,$$

откуда

$$a < 0 \quad \text{или} \quad a > \frac{5}{4}\,. \tag{4}$$

Пусть корни равны x_1 и x_2. Имеем:

$$6 = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (4a)^2 - 2 \cdot 5a = 16a^2 - 10a.$$

Получаем квадратное уравнение

$$8a^2 - 5a - 3 = 0,$$

корни которого $a_1 = 1$ и $a_2 = -\frac{3}{8}$. Значение a_1 не годится, так как не удовлетворяет условию (4). Значение a_2 удовлетворяет этому условию и поэтому подходит.

Ответ: $a = -\frac{3}{8}$.

Задача 6. (*«Физтех», 2014, 9–11*) При каком значении параметра a значение выражения $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 2ax + 2a - 5 = 0$?

Решение. Заметим, что дискриминант

$$D/4 = a^2 - 2a + 5 = (a-1)^2 + 4$$

положителен при всех значениях a. Значит, при любом a наше уравнение имеет два различных корня x_1 и x_2. Как и выше, получаем:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2a)^2 - 2(2a - 5) = 4a^2 - 4a + 10 = (2a-1)^2 + 9.$$

Полученное выражение не меньше 9; оно равно 9 только при $a = 1/2$.

Ответ: $a = 1/2$.

Задача 7. При каких значениях a уравнение $(a-3)x^2 - 2ax + 5a = 0$ имеет только положительные корни?

Решение. При $a = 3$ получаем уравнение $-6a + 15 = 0$, корень которого положителен. Поэтому значение $a = 3$ годится.

Пусть теперь $a \neq 3$. Уравнение является квадратным с дискриминантом

$$D_1 = a^2 - 5a(a-3) = a(15 - 4a).$$

Условие существования корней:

$$a(15 - 4a) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant a \leqslant \frac{15}{4}\,. \tag{5}$$

Сами корни можно не искать — на помощь снова приходит теорема Виета. В самом деле, ясно, что необходимым и достаточным условием положительности корней x_1, x_2 квадратного уравнения служит система неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1x_2 > 0. \end{cases} \tag{6}$$

(Необходимость очевидна: если корни x_1, x_2 положительны, то оба неравенства (6) выполнены. Теперь покажем достаточность. Пусть оба неравенства (6) выполняются. В силу второго неравенства оба корня имеют одинаковый знак. Тогда в силу первого неравенства оба корня положительны.)

В нашем случае система (6) даёт:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a-3} > 0, \\ \dfrac{5a}{a-3} > 0, \end{cases}$$

откуда легко находим

$$a < 0 \quad \text{или} \quad a > 3. \tag{7}$$

Нам остаётся пересечь множества (7) и (5) и к полученному пересечению добавить найденное ранее значение $a = 3$.

Ответ: $\left[3; \frac{15}{4}\right]$.

Задача 8. При каких a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

Решение. Предположим, что x_0 — общий корень данных уравнений. Имеем систему:

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0, \\ x_0^2 + x_0 + a = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$(a - 1)(x_0 - 1) = 0.$$

Отсюда следует, что $a = 1$ или $x_0 = 1$. Надо рассмотреть оба этих случая.

Если $a = 1$, то оба уравнения совпадают: $x^2 + x + 1 = 0$. Это уравнение не имеет корней, поэтому $a = 1$ не годится.

Если $x_0 = 1$, то из любого равенства системы получаем $a = -2$. При данном a исходные уравнения принимают вид:

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad x^2 + x - 2 = 0.$$

Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ в самом деле является общим корнем данных уравнений.

Ответ: $a = -2$.

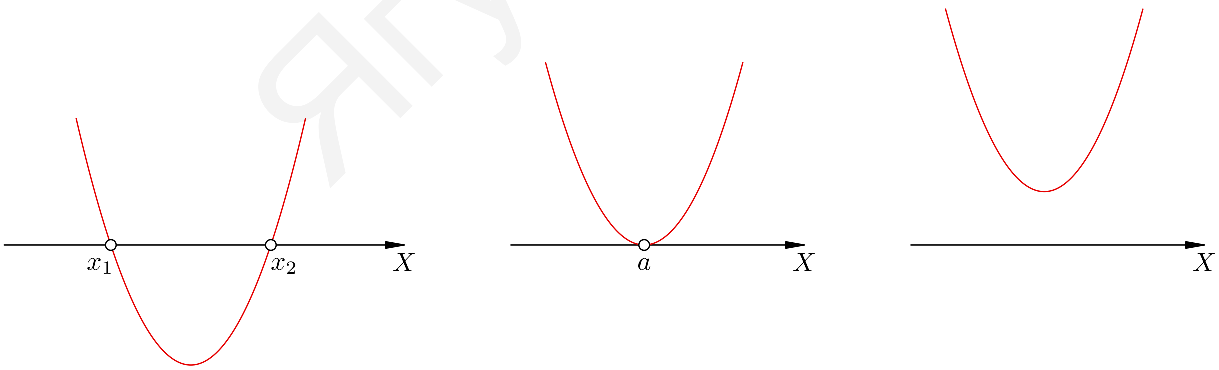
Переходим к рассмотрению квадратных неравенств с параметрами. Здесь мы затронем лишь начало данной темы; другие вопросы будут изложены в следующем листке.

Задача 9. При всех a решить неравенство $x^2 - 2ax + 4 > 0$.

Решение. Находим дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 2ax + 4$:

$$D_1 = a^2 - 4.$$

Возможны три варианта расположения параболы $y = x^2 - 2ax + 4$, изображённые на рисунке (слева направо идут случаи $D_1 > 0$, $D_1 = 0$ и $D_1 < 0$).



Пусть $D_1 > 0$, то есть $a < -2$ или $a > 2$. Тогда парабола пересекает ось X в двух точках:

$$x_1 = a - \sqrt{a^2 - 4}, \quad x_2 = a + \sqrt{a^2 - 4}\,.$$

Множество решений неравенства состоит из тех x, при которых $y > 0$ (ведь именно таков знак решаемого неравенства); то есть из тех x, при которых график проходит выше оси абсцисс:

$$x < a - \sqrt{a^2 - 4}, \quad x > a + \sqrt{a^2 - 4}\,.$$

Пусть теперь $D_1 = 0$, то есть $a = \pm 2$. Парабола касается оси X в точке $x = a$; множество решений нашего неравенства — все x за исключением точки a.

Наконец, пусть $D_1 < 0$, то есть $-2 < a < 2$. Тогда парабола лежит целиком выше оси X, и любой x служит решением нашего неравенства.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, то $x \in \left(-\infty; a - \sqrt{a^2-4}\right) \cup \left(a + \sqrt{a^2-4}; +\infty\right)$; если $a \in (-2; 2)$, то x любое.

Задача 10. Найти все такие a, что решения неравенства $x^2 + (a-5)x - 2a^2 + 2a + 4 \leqslant 0$ образуют отрезок, длина которого больше 6.

Решение. Находим дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + (a-5)x - 2a^2 + 2a + 4$:

$$D = (a-5)^2 - 4(-2a^2 + 2a + 4) = 9a^2 - 18a + 9 = 9(a-1)^2.$$

Тогда корни этого трёхчлена:

$$x_{1,2} = \frac{-(a-5) \pm 3(a-1)}{2},$$

то есть

$$x_1 = \frac{-a+5+3a-3}{2} = a+1, \quad x_2 = \frac{-a+5-3a+3}{2} = 4-2a.$$

В зависимости от того, какой из корней больше, множеством решений данного неравенства является либо отрезок $[a+1; 4-2a]$, либо отрезок $[4-2a; a+1]$ (либо точка в случае совпадения корней). Но нам нет нужды заниматься этим (пусть и несложным) исследованием. Ведь длина отрезка решений в любом случае равна:

$$|x_1 - x_2| = |(a+1) - (4-2a)| = |3a-3|.$$

В соответствии с условием получаем неравенство:

$$|3a-3| > 6,$$

то есть

$$|a-1| > 2,$$

откуда $a < -1$ или $a > 3$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Замечание. Задачу можно было решить и без явного нахождения корней — а именно, с помощью теоремы Виета. В самом деле, неравенство

$$|x_1 - x_2| > 6$$

эквивалентно неравенству

$$36 < (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2;$$

а как действовать дальше, вам уже известно.

Мы хотели бы отметить лишь, что если дискриминант оказывается полным квадратом, то для корней квадратного трёхчлена получаются выражения, не содержащие радикалов, и это обстоятельство часто упрощает решение задачи. Однако такой «подарок судьбы» попадается далеко не всегда. В следующей статье будут рассмотрены задачи, в которых использование явных выражений для корней приводит к техническим трудностям и решение отыскивается иными методами.

Задачи

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2x + a = 0$ не имеет корней.

$\boxed{a > 1}$

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 4x + 2 = 0$ имеет два различных корня.

$\boxed{a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)}$

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

$\boxed{a \in [2; 4)}$

4. Найдите значения параметра m, при которых выражение

$$\text{а) } x^2 - 2(2+m)x + 12 + m^2; \quad \text{б) } 2mx^2 + (2m-4)x + \frac{m}{2} + 3$$

является полным квадратом.

$\boxed{\text{а) } m = 2; \text{ б) } m = \frac{2}{5}}$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(2a-1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ имеет не более одного решения.

$\boxed{a \in \left(-\infty; \frac{16-2\sqrt{19}}{15}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{16+2\sqrt{19}}{15}; +\infty\right)}$

6. При каких a уравнение $a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9 = 0$ имеет более одного корня?

$\boxed{a \in \{-3\} \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)}$

7. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ xy = a - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

$\boxed{a = \frac{1}{4}}$

8. При всех значениях a решите уравнение $x^2 + 2ax - 1 = 0$.

$\boxed{x = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}}$

9. При всех значениях a решите уравнение $x^2 - 2ax + 1 = 0$.

$\boxed{\text{Если } a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty), \text{ то } x = a \pm \sqrt{a^2 - 1}; \text{ если } a \in (-1; 1), \text{ то решений нет}}$

10. При всех значениях a решите уравнение $ax^2 + 3x - 1 = 0$.

$\boxed{\text{Если } a \in \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right), \text{ то решений нет; если } a \in \left[-\frac{9}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty), \text{ то } x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4a}}{2a}; \text{ если } a = 0, \text{ то } x = \frac{1}{3}}$

11. При всех значениях a решите уравнение $(a-1)x^2 - 2ax + 2a - 2 = 0$.

если $a \in \left[2-\sqrt{2}; 1\right) \cup \left(1; 2+\sqrt{2}\right]$, то $x = \frac{a \pm \sqrt{4a-a^2-2}}{a-1}$; если $a = 1$, то $x = 0$

Если $a \in \left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right) \cup \left(2+\sqrt{2}; +\infty\right)$, то решений нет;

12. Найдите, при каких p отношение корней уравнения $x^2 + px - 16 = 0$ равно -4.

$p = \pm 6$

13. При каком целом значении k один из корней уравнения $4x^2 - (3k+2)x + k^2 - 1 = 0$ втрое меньше другого?

$k = 2$

14. Найдите все значения a, при каждом из которых один корень уравнения

$$\text{а) } 9x^2 - 18(a-1)x - 8a + 24 = 0; \quad \text{б) } x^2 + 4(a-2)x + 9a^2 + 5 = 0$$

вдвое больше другого.

а) $a = -1$ или $a = 2$; б) $a = \frac{-64 \pm 3\sqrt{907}}{49}$

15. При каких a сумма квадратов различных корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ больше 1?

$a \in (-\infty; -1) \cup \left(2 + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$

16. При каких a сумма корней уравнения $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов корней?

$a = 1$ или $a = \frac{1}{2}$

17. При каких a сумма кубов различных корней уравнения $x^2 - x + a = 0$ не больше 1?

$a \in [0; \frac{1}{4})$

18. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$ максимальна?

$a = 0$

19. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 2 = 0$ минимальна?

$a = 1$

20. При каких a разность корней уравнения $2x^2 - (a+1)x + a + 3 = 0$ равна 1?

$a = -3$ или $a = 9$

21. При каких a один из корней уравнения $8x^2 - 30x + a = 0$ равен квадрату другого?

$a = 27$ или $a = -125$

22. При каком целом значении параметра b корни уравнения $5x^2 + bx - 28 = 0$ удовлетворяют условию $5x_1 + 2x_2 = 1$?

$b = -13$

23. Найдите числа p и q, если известно, что они являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

$p = q = 0$ или $p = 1$, $q = -2$

24. Найдите все a, при которых уравнение $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ имеет только положительные корни.

$a \in [2; 6]$

25. Найдите все a, при которых уравнение $(2-x)(x+1) = a$ имеет два различных неотрицательных корня.

$a \in [2; \frac{9}{4})$

26. Найдите все a, при которых уравнение $(a-3)x^2 - 6x + a + 5 = 0$ имеет только отрицательные корни.

$a \in [-6; -5)$

27. При каких m уравнение $3mx^2 - (7m+1)x + 2m + 1 = 0$ имеет корни разных знаков?

$m \in (-\frac{1}{2}; 0)$

28. При каких a уравнение $x^2 + (4-2a)x + a = 0$ имеет неотрицательный корень?

$a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$

29. При каких a уравнения $x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

$a = -6$

30. При каком целом b уравнения $2x^2 + (3b-1)x - 3 = 0$ и $6x^2 - (2b-3)x - 1 = 0$ имеют общий корень?

$b = 2$

31. При каких a уравнения

$$x^2 + (a^2 - 5a + 6)x = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 2(a-3)x + a^2 - 7a + 12 = 0$$

равносильны?

$a = 3$ или $a = 4$

32. При всех a решить неравенство $x^2 + 2ax + 1 \leqslant 0$.

Если $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то $x \in \left[-a - \sqrt{a^2-1}; -a + \sqrt{a^2-1}\right]$; если $a = -1$, то $x = 1$; если $a = 1$, то $x = -1$; если $a \in (-1; 1)$, то решений нет

33. При всех a решить неравенство $ax^2 - 2x + 1 > 0$.

Если $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in \left(\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}; \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\right)$; если $a = 0$, то $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$; если $a \in (0; 1]$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}; +\infty\right)$; если $a \in (1; +\infty)$, то x любое

34. При всех a решить неравенство $x^2 - 3ax + 2a^2 \geqslant 0$.

Если $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in (-\infty; 2a] \cup [a; +\infty)$; если $a = 0$, то x любое; если $a \in (0; +\infty)$, то $x \in (-\infty; a] \cup [2a; +\infty)$

35. При всех a решить неравенство $x^2 + (a-5)x - 2a^2 + 2a + 4 < 0$.

Если $a \in (-\infty; 1)$, то $x \in (a+1; 4-2a)$; если $a = 1$, то решений нет; если $a \in (1; +\infty)$, то $x \in (4-2a; a+1)$

36. При каких a решения неравенства $x^2 - (a^2+3a+1)x + a^2 + 3a^3 \leqslant 0$ образуют отрезок, длина которого больше 3?

$a \in (-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$

37. (*МГУ, геологич. ф-т, 1980*) Найти все a, при которых уравнение

$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

$a \neq 1$

38. (*МГУ, филологич. ф-т, 2004*) При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + x + \frac{2a-1}{a+5} = 0$$

не имеет решений?

$a \in (-\infty; -5) \cup (-\frac{9}{7}; +\infty)$

39. (*МГУ, химический ф-т, 2003*) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

$a = 0$ или $a = 1$

40. (*МГУ, физический ф-т, 1981*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$a = \pm\sqrt{2}$

41. (*МГУ, ф-т психологии, 1994*) Известно, что $x = 1$, $y = -1$ — одно из решений системы

$$\begin{cases} 3ax + by = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{1111\pi}{6}\,, \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найти остальные решения системы.

$x = -\frac{1}{4}\,,\ y = \frac{5}{4}$

42. (*МГУ, ИСАА, 1992*) Найти все a, при которых сумма квадратов корней квадратного трёхчлена

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$$

принимает наименьшее значение.

$\boxed{a = 2}$

43. (*МГУ, мехмат, 1989*) Найти все a, при которых выражение

$$(x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1),$$

где $x_{1,2}$ — корни квадратного трёхчлена

$$f(x) = x^2 + ax + a + \frac{1}{5},$$

принимает наименьшее значение.

$\boxed{a = -\frac{1}{4}}$

44. (*МГУ, социологич. ф-т, 2001*) Найти все a, при которых уравнение

$$ax^2 + (2a + 2)x + a + 3 = 0$$

имеет два корня и расстояние между ними больше 1.

$\boxed{a \in \left(-2 - 2\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(0; -2 + 2\sqrt{2}\right)}$

45. (*МГУ, химический ф-т, 2007*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2 + (a + 4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный.

$\boxed{a \in (-1; 0] \cup \left\{\frac{2+2\sqrt{13}}{3}\right\}}$

46. (*МГУ, филологич. ф-т, 2000*) Найти все a, при которых уравнения

$$(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0 \quad \text{и} \quad ax^2 - x + 1 = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

$\boxed{a \in \left\{-\frac{3}{4}, 0, \frac{2}{9}\right\}}$

47. (*МГУ, географич. ф-т, 1992*) Найти все тройки (a, b, c), при которых уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет единственный корень $x = -1$, причём $a + b + c = 1$.

$\boxed{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ и } \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

48. (*МГУ, географич. ф-т, 1996*) Найти все пары (a, b), при которых ненулевые векторы

$$\vec{u} = (a(2-b), 2a-3, a(b-2)) \quad \text{и} \quad \vec{v} = (2-b, a-2, b-2)$$

коллинеарны, но не равны. Найти все $a = b$, при которых эти векторы перпендикулярны.

$a = 3$, b — любое; $a \neq 1, \frac{3}{2}, 2$, $b = 2$. $a = b = \frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$

49. (*МГУ, геологич. ф-т, 1979*) Найти все α, при которых уравнение

$$x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha} + 36 = 0$$

имеет единственный корень.

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{18} + 2\pi n$, $\frac{13\pi}{18} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

50. (*МГУ, физический ф-т, 1988*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} axy + x - y + \dfrac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$a = 1, -\frac{1}{2}, \frac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}$

51. (*МГУ, мехмат, 1987*) Найти все пары (a, b), при которых система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти различных решений.

$a = \pm1$, $b = -2$; a — любое, $b = 2$

52. (*МГУ, мехмат, 2007*) Графики двух функций

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 3 \quad \text{и} \quad g(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

$a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{7}{5}$

53. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11*) Найдите все значения параметра a, при которых для любого значения параметра b неравенство

$$(a+b)x^2 + (3b - 4a + 7)x + 4a - 2b - 6 \geqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение.

$a \geqslant 1$

54. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2014, 10–11*) Определите, сколько существует различных значений a, при которых уравнение

$$\left(a^2-5\right)x^2-2ax+1=0$$

имеет единственное решение.

Два

55. (*«Ломоносов», 2015, 10–11*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(a-6)x^2+8x-4}{x-2}=0$$

имеет ровно один корень. В ответе укажите сумму всех таких значений a.

11

56. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Найдите сумму всех таких целых значений a, принадлежащих отрезку $[-2012; 2013]$, при которых уравнение

$$(a-1)x^2-2(1-a)x+\frac{a-5}{a+4}=0$$

имеет хотя бы одно решение.

2021

57. (*«Ломоносов», 2012, 9*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения

$$x^2+ax+2012=0 \quad \text{и} \quad x^2+2012x+a=0$$

имеют хотя бы один общий корень.

2012, −2013

58. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Найдите наименьшее значение a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2+3ax+a^2=0$ равна 2,52.

−0,6

59. (*«Физтех», 2014, 9–11*) При каком значении параметра a значение выражения $x_1^2+x_2^2$ будет наименьшим, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+4ax+4a-3=0$?

0,25

60. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 9*) Найдите a такое, что сумма квадратов действительных корней уравнения $x^4+ax^2-2017=0$ равна 4.

1006,5

61. (*«Ломоносов», 2014, 9*) Найдите все значения a, при которых сумма модулей корней уравнения $x(x+a-1)=a^2$ равна 2.

$1,\ -\frac{3}{5}$

62. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Найдите все значения a, при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена $x^2 + 2ax + 4a$ равна 3.

$\boxed{-\frac{1}{2}}$

63. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (2 + a)x - 6a^2 + 11a = 3$$

имеет два корня x_1 и x_2, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{2x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{2x_1} \leqslant 2$.

$\boxed{(-\infty; \frac{1}{3}) \cup \{\frac{5}{8}, 1\} \cup (\frac{3}{2}; +\infty)}$

64. (*«Ломоносов», 2015, 8–9*) График квадратичной функции $f(x) = x^2 + 2px - p^2 + 7p - 2015$ пересекает координатные оси в трёх точках A, B и C. Найдите значение p, при котором произведение длин отрезков $OA \cdot OB \cdot OC$ будет наименьшим.

$\boxed{\frac{7}{2}}$

65. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 9*) Изобразите на координатной плоскости множество таких точек (p, q), что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня, один из которых больше 2, а другой — меньше 0.

66. (*Всеросс., 2010, МЭ, 11*) При каких значениях c числа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ могут являться корнями квадратного уравнения $5x^2 - 3x + c = 0$ (α — некоторый угол)?

$\boxed{\text{При } c = -8/5}$