

Параметры. Монотонность

В данной листке собраны задачи, в которых ключевую роль играет свойство монотонности той или иной функции.

Задача 1. («Ломоносов», 2005) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$||x - a| + 2x| + 4x = 8|x + 1|$$

не имеет ни одного корня.

Решение. Запишем уравнение в виде $f(x) = 0$, где

$$f(x) = ||x - a| + 2x| + 4x - 8|x + 1|.$$

Функция f является кусочно-линейной: на каком бы промежутке мы ни снимали модули, наша функция будет иметь вид $f(x) = kx + b$.

Если $x \in E_1 = (-\infty; -1]$, то наименьшее возможное значение k равно $-1 - 2 + 4 + 8 = 9$; следовательно, $k > 0$ при любом $x \in E_1$, и функция f монотонно возрастает на множестве E_1 . Если же $x \in E_2 = (-1; +\infty)$, то наибольшее возможное значение k равно $1 + 2 + 4 - 8 = -1$; значит, $k < 0$ при всех $x \in E_2$, и функция f монотонно убывает на множестве E_2 .

Таким образом, функция f достигает в точке $x = -1$ своего наибольшего значения на $\mathbb{R}$; множество значений функции f есть луч $(-\infty; c]$, где

$$c = f(-1) = ||a + 1| - 2| - 4.$$

Уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений тогда и только тогда, когда $c < 0$, то есть

$$\begin{aligned} ||a + 1| - 2| - 4 < 0 &\Leftrightarrow ||a + 1| - 2| < 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4 < |a + 1| - 2 < 4 \Leftrightarrow -2 < |a + 1| < 6 \Leftrightarrow -7 < a < 5. \end{aligned}$$

Ответ: $(-7; 5)$.

Задачи

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$a \log_3 x + \log_{\frac{1}{2}} x > 1$$

имеет решения, причём среди решений нет больших 1.

$$(-\infty; 1)$$

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Укажите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2y(x - a) + a^2 = 0, \\ 2^{-2-y} \cdot \log_2 x < 1 \end{cases}$$

имеет решения, и найдите эти решения.

$$(-\infty; 0) \cup (0; 1)$$

3. (ОММО, 2017) При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|} \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 4) + 2^{x^2-2x} \log_{\sqrt{3}}(2|x-a| + 3) = 0$$

имеет ровно три решения?

$\frac{7}{8}, 1, \frac{5}{4}$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$25^{-|x-a|} \log_{\sqrt[5]{7}}(x^2 - 2x + 3) + 5^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{7}}(2|x-a| + 2) = 0$$

имеет ровно три различных решения.

$\frac{7}{8}, 1, \frac{5}{4}$

5. («Ломоносов», 2014) Найдите все пары (a, b) , при которых множество решений неравенства

$$\log_{2014}(x - a) > 2x^2 - x - b$$

совпадает с промежутком $(0; 1)$.

$\frac{2013}{1}, b = \log_{2014} q = \frac{1}{2014}$

6. («Ломоносов», 2013) Функция $f(t)$ с областью определения $D(f) = [1; +\infty)$ удовлетворяет уравнению

$$f\left(\frac{4^y + 4^{-y}}{2}\right) = y$$

для любого $y \geq 0$. Для каждого значения $a \neq 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{a}{x+2a}\right) \leq 1$.

Если $a > 0$, то $x \in \left[\frac{17}{26a}; -a\right]$; если $a < 0$, то $x \in \left[-a; \frac{17}{26a}\right]$

7. («Ломоносов», 2005) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$||x - a| + 2x| + 4x = 8|x + 1|$$

не имеет ни одного корня.

$(9; 12)$