

Параметры. Линейные уравнения и неравенства

Среди всего многообразия задач с параметрами наиболее простыми являются линейные уравнения и неравенства. Поэтому начать разумно именно с них.

Задача 1. При всех значениях параметра a решить уравнение $2x + a = 3$.

Решение. Решать тут особо нечего: выражаем x и пишем ответ.

Ответ: $x = \frac{3-a}{2}$.

Задача 2. При всех значениях параметра a решить уравнение $ax = 1$.

Решение. Хочется просто написать $x = \frac{1}{a}$, но нужно проявить осторожность. Ведь a «никому ничем не обязано» и может равняться нулю, а на нуль делить нельзя! Поэтому решение должно выглядеть так.

Если $a = 0$, то решений нет (поскольку вне зависимости от x получается неверное числовое равенство $0 = 1$). Если же $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$.

Ответ: Если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то решений нет.

Задача 3. При всех значениях a решить уравнение $(a + 2)x = a^2 - 4$.

Решение. Имеем:

$$(a + 2)x = (a + 2)(a - 2).$$

Если $a = -2$, то независимо от x получается верное числовое равенство $0 = 0$, так что в этом случае x — любое число. Если же $a \neq -2$, то сокращаем обе части на ненулевое выражение $a + 2$ и получаем $x = a - 2$.

Ответ: Если $a \neq -2$, то $x = a - 2$; если $a = -2$, то x любое.

Задача 4. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

Решение. Выразим из первого уравнения y :

$$y = \frac{ax - a - 1}{4}, \quad (1)$$

и подставим во второе уравнение системы:

$$2x + \frac{(a + 6)(ax - a - 1)}{4} = a + 3.$$

Умножаем на 4, раскрываем скобки и приводим подобные:

$$(a^2 + 6a + 8)x = a^2 + 11a + 18.$$

Раскладываем на множители оба квадратных трёхчлена:

$$(a + 2)(a + 4)x = (a + 2)(a + 9). \quad (2)$$

Если $a \neq -2$ и $a \neq -4$, то уравнение (2) имеет (единственное) решение $x = \frac{a+9}{a+4}$. Подставляя его в (1), найдём соответствующее значение y . Полученная пара (x, y) будет (единственным) решением нашей системы при указанных a .

Если $a = -2$, то уравнение (2) превращается в верное числовое равенство $0 = 0$ независимо от x . Поэтому любое число x является решением уравнения (2). Соотношение (1) даёт соответствующее число y , так что любая пара $(x, \frac{ax-a-1}{4})$ служит решением нашей системы. Стало быть, при $a = -2$ система имеет бесконечно много решений.

Наконец, если $a = -4$, то уравнение (2) превращается в неверное числовое равенство $0 = 10$ независимо от x и потому не имеет корней. Но уравнение (2) является следствием исходной системы; значит, при $a = -4$ не имеет решений и сама система.

Мы рассмотрели все возможные значения a . Как видим, система не имеет решений только при $a = -4$.

Ответ: -4 .

Задача 5. При всех a решить неравенство $ax > 1$.

Решение. Здесь предстоит деление на a , поэтому необходимо рассмотреть три случая.

Если $a = 0$, то неравенство превращается в неверное числовое неравенство $0 > 1$. Поэтому при $a = 0$ решений нет.

Если $a > 0$, то делим наше неравенство на a ; при этом знак неравенства сохраняется: $x > \frac{1}{a}$.

Если $a < 0$, то опять-таки делим на a , но при этом знак неравенства меняется: $x < \frac{1}{a}$.

Ответ: Если $a > 0$, то $x > \frac{1}{a}$; если $a < 0$, то $x < \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то решений нет.

Задача 6. При каких a неравенство $2x - a \leq 3$ является следствием неравенства $3a - x > 5$?

Решение. По определению, неравенство 2 является *следствием* неравенства 1 (или из неравенства 1 *следует* неравенство 2), если каждое решение неравенства 1 является также решением неравенства 2; иными словами, множество решений неравенства 1 содержится в множестве решений неравенства 2.

В нашем случае неравенством 1 является неравенство $3a - x > 5$, решения которого:

$$x < 3a - 5. \quad (3)$$

Неравенством 2 служит неравенство $2x - a \leq 3$, решения которого:

$$x \leq \frac{3+a}{2}. \quad (4)$$

Множество (3) должно содержаться в множестве (4), то есть каждая точка луча $(-\infty; 3a-5)$ должна принадлежать лучу $(-\infty; \frac{3+a}{2}]$. Так будет, если вершина первого луча находится левее вершины второго луча или совпадает с ней:

$$3a - 5 \leq \frac{3+a}{2}.$$

Остаётся решить это неравенство:

$$a \leq \frac{13}{5}.$$

Ответ: $a \leq \frac{13}{5}$.

Задачи

1. При всех значениях a решите уравнение $0,2x - a = 1$.

$(1 + a)5 = x$

2. При всех значениях a решите уравнение $ax = 0$.

Если $a \neq 0$, то $x = 0$; если $a = 0$, то x любое

3. При всех значениях a решите уравнение $(a - 1)x = a + 3$.

Если $a \neq 1$, то $x = \frac{a+3}{a-1}$; если $a = 1$, то решений нет

4. При всех значениях a решите уравнение $(a^2 - 16)x = a - 4$.

Если $a \neq -4$ и $a \neq 4$, то $x = \frac{a+4}{a-4}$; если $a = -4$, то решений нет; если $a = 4$, то x любое

5. При каких a и b уравнение $(a + 5)x = 2b - 6$ имеет бесконечно много решений?

$3 = -5, b = a$

6. При каких k и m уравнение $(k^2 + 2k - 3)x = m + 4$ не имеет решений?

$k = 1$ или $k = -3$, и при этом $m \neq -4$

7. При каких b система

$$\begin{cases} -4x - 4by = b + 1, \\ (b + 1)x + 2y = b + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

$1 = q$ или $2 = q$

8. При каких m система

$$\begin{cases} (m - 2)x + 27y = 4,5, \\ 2x + (m + 1)y = -1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

$7 = m$

9. Найдите все значения p , при которых система

$$\begin{cases} 2x + (9p^2 - 2)y = 3p, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

$\frac{8}{7} = d$

10. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x + ay = 2, \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

$$\frac{3}{2} = v$$

11. Найдите все такие b , чтобы при любом значении a система

$$\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b \end{cases}$$

имела хотя бы одно решение.

$$3 = v$$

12. При всех a решить неравенство $ax \leq 0$.

$$\text{Если } a > 0, \text{ то } x \leq 0; \text{ если } a < 0, \text{ то } x \geq 0; \text{ если } a = 0, \text{ то } x \text{ любое}$$

13. При всех a решить неравенство $(a^2 - 3a + 2)x \geq a - 1$.

$$\text{Если } a = 1, \text{ то } x \text{ любое; если } a = 2, \text{ то решений нет}$$

$$\text{Если } a < 1 \text{ или } a > 2, \text{ то } x \geq \frac{a-1}{a^2-3a+2}; \text{ если } 1 < a < 2, \text{ то } x \leq \frac{a-1}{a^2-3a+2}$$

14. При каких a из неравенства $x + a \geq 1$ следует неравенство $3x > a$?

$$\frac{4}{3} > v$$

15. При каких a из неравенства $2x + a < 2$ следует неравенство $x < -2$?

$$9 \leq v$$

16. При каких a неравенство $a - x \leq 3$ является следствием неравенства $x > 4$?

$$2 \geq v$$

17. При каких a неравенства $2x + a < 3$ и $x - 4a < -1$ равносильны¹?

$$\frac{6}{5} = v$$

18. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x - a \geq 1, \\ x + a < 3 \end{cases}$$

имеет решения?

$$1 > v$$

¹Напомним, что два неравенства называются *равносильными* (или *эквивалентными*), если множества их решений совпадают. Иными словами, равносильные неравенства являются следствиями друг друга.

19. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} 2x + 3a < 1, \\ 2 - x < a \end{cases}$$

не имеет решений?

$$\xi - \leq v$$

20. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} a - 3x \geq 5, \\ a \leq x + 3 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

$$\zeta = v$$

21. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x + 4a \leq 7, \\ 2x - a \geq 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

$$\frac{6}{v1} > v$$

22. (МГУ, физический ф-т, 1981) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

$$\zeta - = v$$

23. (МГУ, физический ф-т, 1977) Найти все a , при которых любое решение системы

$$\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $x > y$.

$$9 > v$$

24. (МГУ, физический ф-т, 1982) Найти все a , при которых уравнение

$$5x - 17a = 21 - 5ax$$

имеет корень, больший 3.

$$(\infty + ; 1 -) \cap (\xi - ; \infty -) \ni v$$

25. (МГУ, экономический ф-т, 1978) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} ax + 2y = a + 2, \\ 2ax + (a + 1)y = 2a + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$$0 \neq v$$

26. (МГУ, ВМК, 2002) При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4x + b^2 + (2 + \sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b + \sqrt{2}) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

$$\zeta^{\wedge -} = q$$

27. (МГУ, ВШБ, 2004) Найдите все значения параметра $p \in [-4; 4]$, при которых неравенство

$$(p - 2) \cdot ((x + 1)(p - 3) + 2x) > 0$$

выполняется при любых $x \geq 0$.

$$d \in [-4; 1] \cup (3; 4]$$

28. (МГУ, физический ф-т, 1998) При каждом a решить неравенство

$$\log_a(3a^x - 5) < x + 1.$$

$$\begin{array}{l} \text{Если } a \in (0; 1), \text{ то } x \in (-\infty; \log_a \frac{3-a}{5}) : \left(\log_a \frac{3}{5}; \log_a \frac{3}{5} \right) \text{, то } x \in (1; 3), \text{ если } a \in (1; 3), \text{ то } x \in \left(\log_a \frac{3}{5}; \log_a \frac{3}{5} \right) : \left(\log_a \frac{3}{5}; \log_a \frac{3}{5} \right) \text{, если } a \in (3; +\infty), \text{ то } x \in \left(\log_a \frac{3}{5}; \log_a \frac{3}{5} \right) : \left(\log_a \frac{3}{5}; \log_a \frac{3}{5} \right) \text{, если } a \in (3; +\infty), \text{ то } x \in \left(\log_a \frac{3}{5}; \log_a \frac{3}{5} \right) : \left(\log_a \frac{3}{5}; \log_a \frac{3}{5} \right) \end{array}$$

29. (МГУ, мехмат, 1995) Найти все a , при которых любое решение системы

$$\begin{cases} x - a^2 \log_3 y = 1, \\ x + 3a \log_3 y = 1 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $y > 1 - x$.

$$\mathfrak{E} - \neq v$$

30. (МГУ, мехмат, 1986) Найти все a , при каждом из которых для любого b система

$$\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b - 6)y - 8az = 8 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$$(\infty + ; \frac{7}{\mathfrak{E}}] \cap [\overline{2} - ; \infty -) \ni v$$