

Параметры. Графики

Данный листок посвящён задачам с параметрами, в которых существенную помощь оказывает построение графиков функций или областей на координатной плоскости.

1. («Физтех», 2017, 9) Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} 3|y| - 4|x| = 6, \\ x^2 + y^2 - 14y + 49 - a^2 = 0 \end{cases}$$

- а) имеет ровно три решения; б) имеет ровно два решения.

$$(6; 9) \cap \{8\} \cap (9; 6) \cup (9; 6] \cup \{8\}$$

2. («Физтех», 2017, 9) Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} 4|x| + 3|y| = 12, \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$$

- а) имеет ровно три решения; б) имеет ровно два решения.

$$\left\{ \frac{1}{2} \wedge \mp \frac{5}{8} \mp \right\} \cap \left(\frac{5}{91}; 7 \right) \cap \left(7; \frac{5}{91} \right) \cup (9; 7] \cup \{8\}$$

3. («Физтех», 2016, 9) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a|2 - x| + \frac{x^2 - x - 6}{3 - x} = 0$$

имеет ровно одно решение.

$$\{5\} \cap [1; 1)$$

4. («Ломоносов», 2008) При каких значениях a существует единственное решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = a \end{cases}$$

$$9; 6$$

5. («Физтех», 2016, 10–11) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y + 9| + |x + 2| - 2)(x^2 + y^2 - 3) = 0, \\ (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

$$9; 23 \wedge 4 + 4\sqrt{15}$$

6. (ОММО, 2014) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|\ln |x|| = ax$ имеет три решения.

$$\left(\frac{e}{1}; 0 \right) \cap \left(0; \frac{e}{1} \right)$$

7. (ОММО, 2015, 11) При каких значениях параметра a уравнение

$$\ln(x - 2a) - 3(x - 2a)^2 + 2a = 0$$

имеет единственный корень?

$$\left[\frac{p}{9q+1} \right]$$

8. («Физтех», 2012) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 2x - 4y - 5, \\ x^2 + y^2 - 9a^2 \leq 8y - 14x - 61 + 12a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

$$[2; \varepsilon]$$

9. («Физтех», 2015, 10–11) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся такое число b , что система

$$\begin{cases} y = x^2 - a, \\ x^2 + y^2 + 8b^2 = 4b(y - x) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) .

$$\left(\infty + \left[\frac{p}{1} - \varepsilon \right] \right)$$

10. («Физтех», 2015, 10–11) Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x = |y - b| + \frac{3}{b}, \\ x^2 + y^2 + 32 = a(2y - a) + 12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) .

$$\left(\infty + \left[\frac{8}{\varepsilon} \right] \cap (0; \infty) \right)$$

11. («Физтех», 2015, 10) Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b - x + y) = 4, \\ y = \frac{9}{(x + a)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) .

$$[2; \pi]$$

12. («Физтех», 2015, 11) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a + y - x) = 49, \\ y = 15 \cos(x - b) - 8 \sin(x - b) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) .

[17:17-]

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной на плоскости (x, y) системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - ay \leq 1 - \frac{5a^2}{4}, \\ y^2 + 4xy + 4x^2 \leq 25a^2, \end{cases}$$

максимальна?

$\frac{5a^2}{4} \leq |v|$

14. («Ломоносов», 2012, 10–11) Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \leq a$ следует неравенство $(|x| + 4)(|y| + 4) \leq 49$.

[81:0]

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (|y - 1| - 1)^2 = 4, \\ y = b|x + 2| + a \end{cases}$$

имеет решения.

$[x^2 + y^2 - 2ax - ay]$

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найти все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y| + |y - x| \leq a - |x - 1|, \\ (y - 4)(y + 3) \geq (4 - x)(3 + x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$L = v$

17. (ОММО, 2012) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x| + |y| + ||x| - |y|| = 6, \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

имеет наибольшее возможное число решений?

(9:8)

18. («Физтех», 2013) При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел (x, y) , удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - xy + 3y^2)(y^2 - 25) \geq 0, \\ |x + 2 + y| + |y + 2 - x| \leq a? \end{cases}$$

9:4]

19. («Физтех», 2013) При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел (x, y) , удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} (3x^2 + 3xy + 2y^2)(|x + y| - 8) \geq 0, \\ x(x - 4) + y(y - 2) = a? \end{cases}$$

2/21, 0

20. («Физтех», 2010) Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |x + 2| - 2y = 0, \\ x^2 + 2x + y^2 - 2ay = -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

2^+ + 2

21. («Физтех», 2011) Найдите все значения параметра b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = |b + y^2|, \\ y = a(x - b^2) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a .

($\infty =: 1] \cap [0; \infty -$)

22. («Физтех», 2009) Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 17 \leq 6(|x| + |y|), \\ x^2 + y^2 + 2x = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$[9; 1 - \sqrt{1}] \cap [\sqrt{1} \wedge - 1; 9 -]$

23. («Физтех», 2007) Найти все значения параметра a , при которых существует ровно две пары действительных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (y + 8 - x^2)(2x + |y|) = 0, \\ 2ax - y = 8 + a^2. \end{cases}$$

(1; 1 - [- 2} \cup \{-4, -1\}

24. («Ломоносов», 2015, 10–11) Найдите наибольшее значение $x + y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1.$$

$$\boxed{[-1; 1]}$$

25. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найдите множество значений выражения $x - y + 1$ при условии

$$(x - y)^2 = 2|2y - x| + x + 15.$$

$$\boxed{(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)}$$

26. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) На координатной плоскости изобразите множество точек (a, b) , для каждой из которой область определения функции

$$f(x) = \log_{\frac{2a-b-x}{2a-b+x}} \left(\frac{x-a-b}{x+a+b} \right)$$

не содержит ни одной точки из отрезка $[1; 2]$

27. («Физтех», 2017, 11) Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin a - 2 \leq 0, \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - b^2 + 4b + 6 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a .

$$\boxed{(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)}$$

28. («Физтех», 2017, 11) Найдите все значения параметра a , при которых существует значение параметра b такое, что система

$$\begin{cases} \arcsin \left(\frac{a-y}{3} \right) = \arcsin \left(\frac{4-x}{4} \right), \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right)}$$

29. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите все отрицательные a , при которых уравнение

$$\frac{6\pi a - \arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) - ax}{\operatorname{tg}^2 x + 4} = 0$$

имеет ровно три решения, принадлежащих множеству $[\pi; +\infty)$.

$$\boxed{\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]}$$

30. (МГУ, ф-т психологии, 2004) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$|x^2 - 5|x|| = a(x + 4)$$

имеет ровно три различных решения.

1:0

ЯГубов.РФ