

Логарифмические уравнения

1. (МГУ, биологический ф-т, 2003) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

$\frac{x}{8x^{\sqrt{-1}} - 2}$

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x = -1.$$

$\frac{x}{1}$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$(1 - \log_2 x) \cdot \sqrt{\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x}} = 1.$$

$\frac{x}{1}$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Решите уравнение

$$\left| \log_2 \frac{x}{2} \right|^3 + |\log_2 2x|^3 = 28.$$

$\frac{x}{1}, 4$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Решите уравнение

$$\left| \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 2 \right| - |\log_2 x + 2| = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x.$$

$\{1\} \cap \left[\frac{x}{1}; 0 \right)$

6. («Физтех», 2015) Решите уравнение

$$x^{\log_3(27x^2)} = \frac{x^9}{81}.$$

$6, 8$

7. («Физтех», 2015) Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{400} \right)^{\log_5 \frac{x}{8}} = \frac{1024}{x^3}.$$

$91, \frac{9}{8}$

8. («Физтех», 2014) Решите уравнение

$$\log_{2^{x+1}+1} (3x^2 + 4x - 3) = \log_{10-2^{2-x}} (3x^2 + 4x - 3).$$

$\frac{3}{2}, 7$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Решите уравнение

$$\log_3(x+1) \cdot \log_3(2x-1) \cdot (3 - \log_3(2x^2 + x - 1)) = 1.$$

2

10. («Физтех», 2014) Решите уравнение

$$\log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) \cdot \log_{x+1} (x^3 + 1) = \log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) + \log_{x+1} (x^3 + 1).$$

2

11. («Физтех», 2013) Решите уравнение

$$\log_{5^x} (x^2 + 9x + 15) + \log_{125^x} x^3 = \frac{2}{x}.$$

1

12. («Физтех», 2013) Решите уравнение

$$\log_{4^{x+4}} x^4 + \log_{2^{x+4}} (x+5)^2 = \frac{4}{x+4}.$$

$\frac{2}{12^{\sqrt{13}}+13}, 1$

13. («Физтех», 2010) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y-1} \sqrt{x+2} = \log_{2y+1} x, \\ \log_x \frac{x^3}{2y+1} = \log_{2y-1} (x+2). \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{21^{\sqrt{13}}+13}, \frac{2}{12^{\sqrt{13}}+13}\right), \left(\frac{1}{21^{\sqrt{13}}+13}, \frac{2}{21^{\sqrt{13}}+13}\right)$

14. («Физтех», 2009) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y+3} (4y^2 - x^2 + 16y + 6x + 8) = 2, \\ \log_{x-4} (x^2 - 6x - y + 13) = 2. \end{cases}$$

(13, 23)

15. («Физтех», 2007) Решите уравнение

$$2 \log_5 (x^2 - 4) + 4 \sqrt{\log_5 (x - 2)^2} - \log_5 (x + 2)^2 = 5.$$

$\frac{9}{5}, 7$

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Решите уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3).$$

$\boxed{1 \mp \sqrt{11+4\sqrt{3}}}$

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2(a-1)\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + a^2 - a - 2 = 0$$

имеет решение.

$\boxed{(-\infty; 0]}$

18. («Ломоносов», 2009) При каждом значении a найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению

$$\log_3\left(\frac{x^2}{x-1} - a + 1\right) = \log_3\frac{x^2}{x-1} - \log_3(a-1).$$

$\boxed{\text{Если } a > 2, \text{ то } x = a - 1 \text{ или } x = \frac{a-2}{a-1}; \text{ если } a \leq 2, \text{ то решений нет.}}$

19. (МГУ, ИСАА, 2004) Решите уравнение

$$(\log_3(3^{-2x} + 1) + x) \cdot (2\log_9(3^{2x} + 1) - x - 2) = 3.$$

$\boxed{\log_3 \frac{27 \mp 3\sqrt{29}}{2}}$